1. **Universitetin adı ODLAR YURDU UNİVERSİTETİ**
2. **Fakültə: RİYAZİYYAT, İNFARMATİKA VƏ TEXNİKİ**

**3. Kafedra: RİYAZİYYAT, İNFARMATİKA VƏ TEXNİKİ FƏNLƏR**

**4. Fənn: R İ Y A Z İ Y Y A T**

**5. Mühazirəçi: Prof., Ə.A.Vəliyyev, Prof.Ə.K.Mehdiyev, dos.,R.K.Mehtiyev**

**BAKI - 2014**

**MÖVZU 1. EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN PREDMETİ.**

**ELEMENTAR HADİSƏLƏR FƏZASI. TƏSADÜFÜ**

**HADİSƏLƏR VƏ ONLAR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏLLƏR**

***PLAN.***

**1.Ehtimal nəzəriyyəsinin predmeti.**

**2.Təsadüfü sınaqlar.**

**3.Elementar hadisələr fəzası.**

**4.Təsadüfü hadisələr üzərində əməllər.**

**4.1.Hadisələr arasında daxilolma və eynigüclülük münasibətləri.**

**4.2.Hadisələrin hasili.**

**4.3.Hadisələrin birləşməsi.**

**4.4.Hadisələrin fərqi və tamamlama əməli.**

**5.Hadisələrin tam sistemi.**

**6.Hadisələr ardıcllığının limiti.**

**7.Hadisələr cəbri və  cəbri.**

**1.Ehtimal nəzəriyyəsinin predmeti. **

Bu gün ehtimal nəzəriyyəsi bütün təbiət elmlərinin təməl daşı, statistika isə insan fəaliyyətinin bütün sahələrinin ayrılmaz hissəsidir”.Məşhur Amerika alimi Kasın bu kəlamı ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın müasir dövrdə oynadığı rolu çox gözəl ifadə edir.Buna görə də bu elmlərin əsasları ilə tanış olmağı riyazi mədəniyyətin zəruri komponenti hesab etmək olar.

Ehtimal nəzəriyyəsi–nəzəri və tətbiqi əhəmiyyət kəsb edən riyazi elmdir.İndi elm və texnikanın elə bir sahəsi yoxdur ki, orada ehtimal–statistika üsullarından bu və ya başqa dərəcədə istifadə edilməsin.Bu cəhət həm ehtimal nəzəriyyəsinin, həm də onun tətbiq edildiyi müxtəlif elm sahələrinin (məsələn, riyaziyyat, fizika, kimya, biologiya, iqtisadiyyat, ekonometrika, tibbi elm, hərbi iş, texnika və s.) inkişafına geniş imkan vermişdir.

Son bir neçə onilliklər ərzində riyaziyyatda yeni elmi istiqamətlər meydana gəl-mişdir. Bunlardan etibarlılıq, kütləvi xidmət, stoxostik proqramlaşdırma, atəş,dəniz dalğaları, meteorologiya, müşahidənin xətaları, informasiya, radiotexnika, rabitə və s. nəzəriyyələri qeyd etmək olar. Ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiq sahələri daim genişlənir və bu proses bu gün də davam edir. Konkret həyati məsələləri həll etməyə imkan verən bu elmi istiqamətlər ehtimal nəzəriyyəsinin inkişafına əsaslanır.İndi ehtimal nəzəriyyəsinə nəinki riyaziyyatçı, habelə mühəndis, iqtisadçı, geoloq, həkim, fizik, kimyaçı, bioloq və s. kimi müxtəlif peşə sahibləri müraciət edir.

Təbiət və cəmiyyət qanunları səbəb əlaqələrinin təzahürü formalarına görə deteminik və statistik qanunlara bölünür

Məlumdur ki, riyaziyyat , başqa elm sahələrində olduğu kimi, gerçək aləmdə baş verən hadisə və proseslərin qanunlarını öyrənir. Buna klassik nümunə kimi Nyuton mexanikasını göstərmək olar. Göy cisimlərinin çoxəsrlik müşahidəsi nəti-cəsində onların hərəkət qanununları riyazi düsturlar şəklində verilmişdir. Mexanikanın qanunlarına əsasən Günəş sisteminin planetlərinin mövcud vəziy-yətinə görə onların gələcək zamanın istənilən anına vəziyyəti praktiki olaraq birqiymətli təyin edilə bilir. Eyni zamanda günəş və ay tutulmalarının tarixini əvvəlcədən söyləmək olar. Bütün bunlar determinik qanunulardır.

Bununla yanaşı makroaləmin əksər hadisələri haqqında bizim günbəgün dərinləşən və dəqiqləşən kifayət qədər biliklərimiz olmasına baxmayaraq onların keçmişi və gələcəyi haqqında dəqiq fikir söyləmək mümkün deyildir.Məsələn, iqlimin uzunmüddətli, havanın isə qısa müddətli dəyişməsi proqnozlaşdırmanın obyekti sayıla bilməz. Mikroaləmin əksər qanun və qanunauyğunluqları determinik çərçivəyə daxil edilə bilməz.Məsələn, nəzəri fizikaya görə konkret anda elektronun vəziyyəti haqqında heç nə demək mümkün olmadığı halda, onun fəzada paylanma vəziyyəti haqqında danışmaq olar. Bü cür qanunlara statistik qanunlar deyilir. Statistik qanunlara görə sistemin gələcək vəziyyəti birqiymətli olaraq deyil, müəyyən ehtimalla müəyyən edilir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin mühüm tətbiq sahələrindən biri də iqtisadiyyatdır. Bu gün iqtisadi proseslərin tədqiqi və proqnozlaşdırılmasını ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan ekonometrik proqnozlaşdırma, reqressiya analizi, trend və hamarlaş-dırma modelləri və bir sıra digər üsullardan istifadə etmədən təsəvvür etmək mümkün deyildir.

İqtisadiyyatın sığorta ehtiyatı, ehtiyat gücləri, Dövlət ehtiyatı və bu kimi anla-yışları statistik qanunauyğunluqların mövcudluğunu təsdiq edir. Bu isə ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqini zəruri edir. Eyni zamanda qeyd etmək lazımdır ki, təsa-düfsüz inkişaf mümkün deyildir. Həyatın yaranmasını, bioloji növlərin təkamü-lünü, bəşəriyyət tarixini, insanların yaradıcılıq fəaliyyətini, sosial–iqtisadi sistem-lərin inkişafını təsadüfsüz təsəvvür etmək olmaz. Beləliklə, təsadüfün təzahürünə hadisənin artıq formalaşmış istiqamətdən müsbət (yeni elmi kəşflərin və texno-logiyaların tətbiqi, istesalın təşkili və idarə edilməsinin yeni formaları və s.) və mənfi (kortəbii fəlakətlər, avadanlığın sıradan çıxması, işçilərin xəstələməsi, onların fiziki və psixi vəziyyəti və s.) kənarlaşma kimi baxmaq lazımdır. Bütün bunlar bilavasitə hadisənin axarının əhəmiyyətli surətdə dəyişməsinə gətirib çıxarır. Bazat iqtisadiyyatı şəraitində xalq təsərrüfatı sahələrinin əlaqələri daha da mürəkkəbləşir. Beləliklə, dinamik sistemin inkişaf qanunauyğunluqlarına görə sosial–iqtisadi hadisələri təsvir edən qanunların statistik xarakteri güclənməlidir.

Bütün bunlar iqtisadi hadisə və proseslərin statistik analizinin bir vasitəsi kimi ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın metodlarının mənimsənilməsini zəruru edir.

Insan fəaliyyətinin bütün sahələrində nəticəsi təsadüfdən asılı olan, yəni nəticə-sini əvvəlcədən söyləmək mümkün olmayan hadisələrə tez–tez rast gəlinir. Məsələn, sığorta edilmiş əmlakın təbii fəlakət nəticəsində sıradan çıxması təsadü-fün nəticəsidir. Belə olan halda təsadüfü hadisələr haqqında əvvəlcədən nə isə söyləmək olarmı və yaxud sığorta şirkətləri öz işlərində nəyi əsas tuturlar? Məlum olur ki, sığorta edilmiş ayrıca bir obyektin gələcək taleyi haqqında heç nə söyləmək mümükn olmasa da, onların əksəriyyətinin vəziyyəti haqqında yəqinliklə cox şey demək olar.

Real gerçəklikdə baş verən hər bir hadisəni öyrənmək üçün insanlar müəyyən müşahidələr, təcrübələr, ölçmə işləri–sınaqlar aparırlar. Mümkün qədər çox aparıla bilən, praktiki olaraq qeyri–məhdud sayda təkrar edilə bilən sınaqların nəticəsinə əsasən həmin hadisənin xassələri və qanuna uyğunluğu aşkar edilir. İnsanlar bu qanunauyğunluğu öyrənməklə müəyyən dərəcədə təsadüfü hadisələri idarə etməyi, onların təsirinin nəticələrini əvvəlcədən söyləməyə və aradan qaldırmağa, hətta onlardan öz praktiki fəaliyyət sahələrində məsədyönlü şəkildə istifadə etmək imkanı əldə edirlər.

Tutaq ki, eyni şərtlər kompleksi daxilində aparılan sınaq nəticəsində hadisə baş verə və verməyə bilər. Onda təsadüfü hadisəni, hadisənin başvermə sayının aparı-lan sınaqların sayına nisbəti olan hadisənin tezliyi ilə xarakterizə etmək olar. Tez-liyə misal olaraq müəyyən yaşayış məntəqəsində il ərzində doğulan oğlanların hissəsini, məhsul istehsalında keyfiyyətsiz məhsulun xüsusi çəkisini və s. göstər-mək olar.

Coxlu sayda sınaqlardan ibarət müxtəlif seriyalarda hadisənin tezliyi müəyyən sabit ədəd ətrafında ehtizas etdikdə deyirlər ki, bu hadisənin tezliyi dayanıqlıq xassəsinə malikdir.Məsələn, oğlan doğulma hadisəsinin tezliyi bu xassəyə malikdir.

Tezlikləri dayanıqlıq xassəsinə malik olan təsadüfü hadisələrə müxtəlif bilik sahələrində o cümlədən, fizikada , biologiyada, kimyada, maşınqayırma sənaye-sində, atəş nəzəriyyəsində, iqtisadiyyatda və s. tez–tez təsadüf edilir.

Hadisənin təsadüfülüyü onun səbəbsiz olması anlamına gətirmir. Təbiət hadi-sələri bir–biri ilə qarşılıqlı əlaqədədirlər və bir-birilərini şərtləndirirlər. Onların birinin dəyişilməsi digərinin dəyişilməsinə səbəb olur. Gerçək aləmdə ayrıca götü-rülmüş heç bir hadisəni anlamaq mümkün deyildir. Əksinə istənilən hadisə onu əhatə edən hadisələrlə qarşılıqlı əlaqədə götürüldükdə onu anlamaq və əsaslan-dırmaq olur. Məsələn, atəş zamanı mərminin hədəfi vurması təsadüfü hadisədir və onun səbəbini əsaslandırmaq olar. Belə ki, mərminin üçüş traektoriyasına coxlu sayda faktorlar təsir edir. Onların hər biri müxtəlif anlarda kəmiyyətcə müxtəlif təsirlərə malikdirlər. Ona görə də müəyyən zaman kəsiyində onların hər birinin mərminin traektoriyasına ayrılıqda və birgə təsirini qiymətləndirmək mümkün olmur və nəticədə mərminin hədəfi vurması təsadüfün nəticəsi olur. Deməli, mər-minin hədəfi vurmasına bir hadisə kimi baxdıqda, aparılan təcrübə zamanı o, baş verə də bilər, verməyə də bilər. Belə hadisənin konkret bir təcrübə zamanı baş verməsi haqqında qabaqcadan heç nə demək mümkün olmasa da , çoxlu sayda ardıcıl aparılan təcrübələr nəticəsində onun baş verib–verməməsi haqqında bəzən müəyyən qanunauyğunluq almaq olar.

Beləliklə, ehtimal nəzəriyyəsi tezlikləri dayanıqlı olan təsadüfü hadisələri öyrənir və bu hadisələrin kütləvi təkrarında onların qanunauyğunluqlarını aşkar edir.

Qanunauyğun hadisə dedikdə münasib şəraitdə hökmən baş verən hadisə başa düşülür.Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, elə hadisələr də vardır ki, onların baş verib-verməməsi təsadüfü xarakter daşıyır. Məsələn, bir atəş zamanı atılan güllə hədəfə dəyədə bilər, dəyməyədə bilər; sığorta edilmiş əmlak təbii fəlakət nəticəsində sıradan çıxada bilər çıxmayada bilər. Belə hadisələrin qanunauyğunluğunu qabaq-cadan söyləməkdə seçilən riyazi model böyük rol oynayır, yəni ehtimal nəzəriy-yəsi əslində təsadüfü proseslərin riyazi modelini öyrənən riyazi elmdir. Başqa sözlə, ehtimal nəzəriyyəsi riyazi modellərdə təsadüfü hadisələrin ehtimalları ara-sında elə əlaqə təyin edir ki, bu əlaqələr mürəkkəb hadisələrin ehtimallarını daha sadə hadisələrin ehtimalları vasitəsilə hesablamaq imkanı verir.

Eyni şəraitdə hər hansı hadisəni öyrənmək üçün ardıcıl olaraq aparılan müşa-hidə və təcrübələrin nəticəsi çox zaman eyni olmur. Dəyişməyən şəraitdə eyni bir cihazla aparılan ölçmələrin nəticəsi, ümumiyyətlə müxtəlif olur. Buna görə də aparılan hər bir təcrübənin və ya müşahidənin nəticəsini əvvəlcədən söyləmək çox zaman mümkün olmur.

Təsadüfü hadisəninqanunauyğunluğunu ancaq onu eyni bir şəraitdə təkrarən coxlu sayda müşahidə etdikdə görmək olar. Buradan belə bir nəticəyə gəlirik ki, ancaq praktiki olaraq qeyri–məhdud sayda müşahidə edilə bilən hadisələri öyrən-mək olar. Belə hadisələrə kütləvi hadisələr deyilir Buna görə də ehtimal nəzəriy-yəsində əsasən kütləvi hadisələr, yəni praktiki olaraq eyni şəraitdə istənilən sayda təkrar oluna bilən hadisələr öyrənilir.

Burada qeyd etmək lazımdır ki, təsadüfü hadisələri öyrənmək üçün heç də onların faktiki olaraq coxlu sayda müşahidə etməyə lüzum yoxdur. Ən sadə hadi-sələrin qanunauyğunluqlarını öyrənənib və bunun əsasında müvafiq nəzəriyyəni quraraq daha mürəkkəb hadisələrin, hətta praktiki olaraq bilavasitə müşahidə edilə bilməyən, lakin prinsip etibarı ilə xəyalən coxlu sayda müşahidə edilə bilən hadisələri nəzəri olaraq öyrənmək olar. Məsələn bir uçuş üçün nəzərdə tutulmuş kosmik gəminin layihələndirilməsi prosesində bütün vasitələrin saz işləməsinə və üçuşun müvəffəqqiyyətlə həyata keçməsinə əmin olmaq üçün üçüşü təmin edən vasitələrin etibarlılığını tədqiq etmək olar. Elmin gücü ondadır ki, bilavasitə müşa-hidələrdən alınan sadə müddəalara əsaslanaraq bilavasitə müşahidə aparmadan nəzəri üsullarla yeni faktları aşkara cıxarmaq və onların axarlnı əvvəlcədən söylə-mək olar.

Hər bir hadisə kimi təsadüfü hadisələr də müəyən səbəblər üzündən meydana çıxır. Hadisələrin ümumi əlaqələri qanununa görə ətraf aləmdə başverən bütün hadisələr qarşılıqlı əlaqədədirlər və biri digərinə təsir edir. Ona görə də müşahidə edilən hər bir hadisə qeyri–məhdud sayda digər haisələrlə səbəb əlaqəsindədir və onların axarı qeyri–məhdud sayda amillərdən asılıdır. Qeyri–məhdud sayda olan bu əlaqələrinin hamısını öyrənmək və onların hər birinin təsirini qiymətləndirmək ümumiyyətlə mümkün deyildir. Ona görə də bu və ya digər hadisə öyrənildikdə hadisənin axarını müəyyənedən əsas amillərlərlə kifayətlənirlər və kifayət qədər çoxlu sayda ikinci dərəcəli amilləri nəzərə almırlar. Bütün bunlar isə hadisənin mahiyyətini daha dərindən anlamağa və onun qanunauyğunluğunu aşkar etməyə imkan verir. Başqa sözlə öyrənilən hadisə müvafiq sadə model ilə əvəz edilir. Bunun nəticəsində elmin istənilən qanunu öyrənilən hadisənin əsas mahiyyətini əks etdirir, lakin, o, hadisənin özündən daha bəsitdir.Heç bir qanun hadisəni hərtərəfli, onun bütün müxtəlifliyi və tamlığı ilə xarakterizə edə bilməz. Qeyri–məhdud sayda nəzərə alınmayan amilərin birgə təsri hesabına real hadisənin qanunauyğunluqdan müşühidə edilən kənarlaşmaları təsadüfü hadisələrdir.

Hər hansı bir hadisənin qanunauyğunluğunu təcrübü olaraq müəyyən etmək üçün onu eyni bir şəraitdə təkrarən cox sayda müşahidə etmək lazımdır. Bu zaman eyni bir şərait dedikdə nəzarət edilən amillərin bütün kəmiyyət xarakteristikalarının eyni bir qiymət alması başa düşülür. Bununla belə nəzarət edilən bütün amillər müxtəlif olacaqdır. Nəticədə eyni bir hadisənin müxtəlif müşahidələrində nəzarət edilən amillərin təsiri praktiki olaraq eyni olacaqdır. Hdisənin qanunauyğunluğu elə burada aydınlaşır. Nəzarət edilə bilməyən amillərin təsiri hesabına qanunauy-ğunluqdan təsadüfü kənarlaşmalar isə müxtəlif müşühidələr də müxtəlif olacaqdır. Təsadüfü kənarlaşmaların konkret müşahidədə hansı qiymət alacağını prinsip etibarı ilə əvvəlcədən söyləmək mümkün deyildir.

Ehtimal nəzəriyyəsində riyaziyyat elminin bir çox sahələrində istifadə olunan üsullardan və alınan nəticələrdən (kombinator analizdə, riyazi analizdə, cəbrdə, məntiqdə və s.) geniş istifadə olunur. Ancaq ehtimal nəzəriyyəsinin sırf özünə məxsus öyrənmə üsulları vardır. Çünki onun öyrəndiyi məsələlərin əksəriyyətində dəqiq riyazi quruluş olmur və belə məsələlərin riyazi modelini qurmaqda nəzəri ehtimal intuisiyadan istifadə oluna bilər.

Ehtimal nəzəriyyəsinin analitik üsullarının işlənib hazırlanmasında və ümumi-ləşdirilməsində Muavrın (1667–1754), Laplasın (1749–1827), Qausun (1821–1894), Puassonun (1781-1840), Çebışevin (1821–1894 ), Markovun (1856–1922), Lyapunovun (1857–1918) böyük xidmətləri olmuşdur.

Müasir ehtimal nəzəriyyəsini aksiomlar sistemi əsasında qurmağa cəhd edən S.N.Bernşteyn (1880–1948), lakin tam quran A.N.Kolmoqorov (1903–1987) olmuşdur. Bu nəzəriyyəyə inkişaf tempi verən bir sıra alimlərin, o cümlədən, Xinçinin (1894–1959), Sluskinin (1880–1948), Levinin (1886–1971) v. s. alimlə-rin adlarını qeyd etmək olar.

**2. TƏSADÜFÜ SINAQLAR**

Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biri təsadüfü (stoxastik) sınaq anlayışıdır. Nəticəsini əvvəlcədən söyləmək mümkün olmayan sınaqlara təsadüfi sınaqlar deyilir.

Praktiki və elmi fəaliyyətin müxtəlif sahələrində çoxlu sayda təkrar edilə bilən sınaqlara və müşahidələrə rast gəlinir. Bu cür hallarda sınağın nəticələrinin müəy-yən xarakteristikaları hər hansı bir əlamət üzrə müşahidə edilir və yaxud ölçülür.

Əksər hallarda bu xarakteristikalar müəyyən kəmiyyətlə ifadə edilirlər. Müəy-yən hallarda isə müşahidənin nəticəsi keyfiyyət xarakteristikasına malik olur. Aydındır ki, əgər sınaq zamanı hər hansı bir obyektin rəngi müşahidə edilirsə və yaxud sınaq ilə əlaqədar hadisənin baş verməsi və ya verməməsi, məhsulun keyfiyyəti müşahidə edilirsə onda sınağın nəticəsi keyfiyyət xarakteristikasına malikdir. Axırıncı halda şərti işarələr sistemindən istifadə etməklə sınağın nəticələ-rini, yəni xarakteristikaları həmişə kəmiyyətlə ifadə etmək olar.

1.Əgər sınaq zamanı zər atılırsa onda sınağın nəticəsi *1,2,...,6* rəqəmlərindən biri ilə ifadə edilir.

2.Əgər müəyyən heyvanlar qrupunun hər bir nümayəndəsinin çəkisi və uzunluğu ölçülürsə, onda müşahidənin nəticəsi *2* ədədlə ifadə edilir.

3.Əgər müəyyən zaman kəsiyində k sayda əmtəənin qiyməti müşahidə edilirsə, onda hər bir müşahidənin nəticəsi k sayda ədədlə ifadə edilir.

4.Əgər hər hansı rayonda doğulmuş uşağın cinsi müşahidə edilirsə, onda hər bir müşahidənin nəticəsi bilavasitə kəmiyyətlə (müəyyən ədədlə) ifadə edilmir. Ancaq şərti olaraq oğlan doğulmasını *“1”*–lə, qız doğulması *“0”* ilə işarə etsək onda hər bir müşahidənin nəticəsi ədədlə ifadə ediləcəkdir.

5.Fabrikdə məmulat hər birində *n* ədəd məmulat olan partiya ilə buraxılır.

Məmulatın keyfiyyətinin yoxlanılması onun sıradan çıxması ilə nəticələnir. Ona görə də keyfiyyətə nəzarət məqsədilə *n* məmulatdan təsadüfi seçmə yolu ilə *m* saydası götürülür və onların keyfiyyəti yoxlanılır. Sınağın nəticəsi seçilmiş məmu-latdan yararsızların sayı olacaqdır. Yararsız məmulatların sayı bütün məmulatlar keyfiyyətli və yaxud yararsız olduqda təyin edilə bilər. Təsvir edilən sınaq təsadüfi sınaqdır. Qeyd edək ki, məmulatın keyfiyyətinin yoxlanılmasının bu üsulu istehsal prosesində istifadə edilir və seçmə üsulu adlanır.

6. Alınmış lotereya biletinə oyunda nəzərdə tutulmuş uduşlardan istənilən biri düşə bilər. Ancaq oyunun sonuna qədər biletin uduşlu olub–olmamasını müəyyən etmək olmaz. Beləliklə, lotereya oyunu təsadüfi sınağa misal ola bilər.

7. İnfeksion xəstəliyin epidemiyasına nəticəsi bu və ya digər epidemiyanın axını olan təsadüfi sınaq kimi baxıla bilər.

Bir çox hallarda müşahidə edilən hadisə o dərəcədə yaxşı öyrənil­miş olur ki, hər bir müşahidənin nəticəsini əvvəlcədən qiymət­lən­dirmək olur. Məsələn, əgər sınaq zamanı hər hansı rəsədxanada il ərzində günəşin tutulma sayı müşahidə edilirsə, onda astroloji hesablamaların köməyi ilə yaxın illər üçün il ərzində günəş tutulmalarının sayını əvvəlcədən söyləmək olar.

Oxşar mənzərəni hadisəni idarə edən qanunlar məlum olduqda və təcrübi hesablamalarda onların istifadəsi kifayət qədər sadə olduqda da söyləmək olar.

Ancaq əksər hallarda ayrı-ayrı müşahidələrin nəticələrini əvvəl­cə­dən söyləmək üçün bizim biliklərimiz kifayət etmir. Yuxarıda ba­xı­lan 1–7 məhz bu hallara aiddir. Bu cür sınaqlara təsadüfü sınaqlar deyilir.

Sınaq anlayışının çox geniş mənası vardır.Metal pulun döşəmə üzərinə atılması, müəyyən hədəfə atəş açılması, hər hansı fiziki kəmiyyətin ölçülməsi, nərd oyunu zərinin taxta üzərinə atılması və s. sınağa misaldır.

Hər bir sınaq müəyyən şərtlər və ya şərtlər kompleksi daxilində yerinə yetirilir.Sınağın aparılma şərtləri əvvəcədən məlum olur və yalnız bu şərtlər ödənildikdə sınaq aparılır.Təkrarən aparılan sınaq zamanı bu şərtlər dəyişilməz qalır.

Hər bir sınaq öz aparılma şərtləri və nəticələri ilə xarakterizə olunur. Sınağın aparılma şərtləri dəyişdikdə həmin sınaq dəyişir , başqa sınaq alınır.

Tutaq ki,  təkrarən aparıla bilən ( əlbəttə, eyni şərtlər daxilində ) sınaqdır. sınağının hər bir icrası zamanı alınan nəticəyə hadisə deyilir. Məsələn,  sınağı tam düzgün formada olan bir zəri çox hamar səthi olan taxta üzərinə atmaqdan ibarət olduqda hadisə olaraq

a) «zərin 6 xalı olan üzünün yuxarı düşməsini»,

b) «zərin cüt sayda xalı olan üzünün yuxarı düşməsini»,

c) «zərin tək xalı olan üzünün yuxarı düşməsini» və s. götürmək olar.

Atıcı 4 hissəyə bölünmüş hədəfə atəş açır.Bu zaman atəş sınaqdır, hədəfin müəyyən hissəsinə düşmək isə hadisədir.

Qutuda rəngli şarlar vardır. Qutudan təsadüfü qaydada hər hansı şar çıxa-rılır.Şarın çıxarılması sınaq, şarın müəyyən rəngə malik olması isə hadisədir.

Aparılan sınaq zamanı nəzərdə tutulan hadisə baş verə də bilər, verməyə də bilər.

Sınağın hər bir icrasında hökmən baş verən hadisəyə yəqin hadisə deyilir. Sınağın heç bir icrasında baş verməyən ( və ya hökmən baş verə bilməyən ) hadi-səyə mümkün olmayan hadisə deyilir.

Nəhayət, sınağın icrası zamanı nəzərdə tutulan hadisə baş verə də bilirsə, verməyə də bilirsə , yəni sınaq zamanı həmin hadisənin baş verib–verməməsi haqqında qabaqcadan heç nə demək mümkün deyildirsə, onda həmin hadisəyə təsadüfü hadisə deyilir.

Əlbəttə, hər bir hadisənin müəyyən bir sınağa nəzərən ( yəni aparılan müəyyən bir sınaq nəticəsində ) yəqin, mümkün olmayan, təsadüfiü olmasından danışmaq olar. Bir sınağa nəzərən yəqin, mümkün olmayan və təsadüfü olan hadisə başqa bir sınağa nəzərən başqa xarakterli ola bilər.

**Misal 1.** Bir oyun zərini atmaqdan ibarət olan sınaq nəticəsində zərin yuxarı düşən üzərində *1, 2, 3, 4, 5, 6* xallarının hər hansı birisinin olması–yəqin hadisə, yuxarı düşən üzərində xallar sayının 8 olması–mümkün olmayan hadisə, yuxarı düşən üzündə cüt sayda xalların olması isə tısadüfü hadisədir.

**3.ELEMENTAR HADİSƏLƏR FƏZASI.**

Tutaq ki, təkrarən aparıla bilən hər hansı sınağının icrasında cüt-cüt uyuşmayan  nəticələrindən ancaq biri baş verir.Bu halda , nəticələrinin hər biri sınağının elementar hadisəsi ( və ya elementar nəticəsi ) adlanır.Bütün belə elementar hadisələr çoxluğuna sınağının elementar hadisələr fəzası deyilir və  ilə işarə olunur:

Həyatda istənilən sayda təkrarən aparıla bilən müxtəlif sınaqlar və onların elementar nəticələri vardır. Bunların hər birini ayrılıqda öyrənməyin heç bir elmi əhəmiyyəti yoxdur. Buna görə də ehtimal nəzəriyəsində konkret elementar hadisələr və elementar hadisələr fəzası deyil, ümumi ( abstrakt ) elementar hadisələr fəzası öyrənilir.

Ümumiyyətlə, ixtiyari təbiətli  elementlərinin  çoxluğu elementar hadi-sələr fəzası, onu təşkil edən  elementləri isə elementar hadisələr adlanır. Hər bir real hadisə və prosesi öyrənmək üçün uyğun elementar hadisələr fəzası təyin edilir. Baxılan sınağın cüt–cüt uyuşmayan uyğun nəticələri isə elementar hadisələr hesab olunur.

Hadisə anlayışı ümumi halda da uyğun şəkildə təyin edilir. Elementar hadisələr fəzasının hər bir alt çoxluğuna təsadüfü hadisə və ya sadəcə olaraq hadisə deyilir. Aparılan sınaqda müəyyən hadisənin baş verməsi, onu təçkil edən ele-mentar hadisələrin heç olmasa birinin baş verməsi deməkdir. Beləliklə, baxılan sınaq nəticəsində baş verə bilən bütün hadisələr çoxluğu  fəzasının bütün altçoxluqlqrı çoxluğundan ibarətdir.  çoxluğundan ibarət olan hadisə, sınaq nəticəsində baş verən hər bir elementar hadisənin baş verməsi nəticəsində baş verir. Deməli,  fəzası yəqin hadisədir. Boş çoxluq isə sınağın icrası zamanı heç bir elementar hadisənin baş verməsi nəticəsində baş verə bilməz, yəni  boş çoxluğu mümkün olmayan hadisədir.

Qeyd edək ki, hər bir elementar hadisəyə  fəzasının bir elementli altçoxluğu kimi baxmaq olar. Buna görə də  fəzasını təşkil edən elementar hadisələrin hər biri təsadüfü hadisədir.

*n* sayda elementdən ibarət olan sonlu çoxluğun  asyda alt çoxluğu vardır. Doğrudan da, bu çoxluğun k elementli müxtəlif altçoxluqlarının sayı  olduğundan olar.

Buradan aydın olur ki, elementar hadisələr fəzası  sayda hadisə ilə bağlıdır. Bu hadisələrdən biri yəqin hadisə ( fəzanın özü ) , o biri isə mümkün olmayan hadisədir (boş çoxluq). Hər bir prosesə uyğun elementar hadisələr fəzası vardır.

1. Metal pulun bir dəfə atılşından ibarət olan sınaq aparılır. Bu sınağın ele-mentar hadisələr fəzası  çoxluğu olar. Burada Q metal pulun qerb üzünün Ş isə şəbəkə üzünün düşməsidir.

2. Metal pul iki dəfə atılır.Bu sınağın elementar hadisələr fəzası  çoxluğudur.

3. Oyun zəri bir dəfə atılır və zərdə düşən xalın sayı müşahidə edilir. Bu sı-nağın elementar hadisələr fəzası =(1,2,3,4,5,6) çoxluğu olar.

4. Oyun zəri iki dəfə atıldıqda elementar hadisələr fəzası =çoxluğu olar.

5.Metal pul qerb üzü düşənə kimi atılır. Bu sınağın elementar hadisələr fəzası  çoxluğu olar. Burada  qerb üzünün ilk dəfə *n*–ci atılışda düşdüyünü göstərir.

**4.TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏLLƏR**

**4.1.HADİSƏLƏR ARASINDA DAXİLOLMA VƏ EYNİGÜCLÜLÜK MÜNASİBƏTLƏRİ**

Tutaq ki,  –müəyyən  sınağının elementar hadisələr fəzasıdır. Bu sınaq ilə əlaqədar bütün hadisələr çoxluğunu , yəni  –nın altçoxluqları sinfini S ilə işarə edək.

Fərz edək ki,  hadisəsi baş verdikdə hadisəsi hökmən baş verir. Bu halda  hadisəsi  hadisəsini doğurur deyirlər və bunu *AB* kimi yazırlar.– daxil-olma münasibəti adlanır.

Tərifə görə

AB

Məsələn, bir dəfə atılan zərdə *2, 4, 6* xallarına uyğun üzlərdən hər hansı biri-nin düşməsi hadisəsi düşən üzdə cüt rəqəmin olması hadisəsini doğurur. Bir ele-mentli  və  hadisəsi üçün  təklifi  təklifi ilə eynigüclüdür. Daxil-olma münasibəti aşağıdakı xassələrə malikdir.



 olduqda *A* və *B* hadisələri eynigüclü hadisələr adlanır və bu fakt  kimi yazılır. Tərifə görə



Eynigüclülük munasibəti ekvivalentlik münasibətidir, yəni o, simmetriklik, refleksivlik və tranzitivlik xassələrinə malikdir:



Məhz bu mənada eynigüclü hadisələri birləşdirərək bir hadisə kimi baxmaq olar.

**4.2. HADİSƏLƏRİN HASİLİ.**

 və  hadisələrinin hasili elə hadisəyə deyilir ki, o ancaq və ancaq və  birlikdə baş verdikdə yerinə yetir.  və  hadisələrinin hasili  və ya  ilə işarə edilir. Buradan aydın olur ki,  hasili həm  hadisəsinə həm də  hadisəsinə daxil ilan elementar hadisələrdən ibarətdir, yəni



*n* sayda  hadisələrinin hasili



bərabərliyi ilə verilən hadisəyə deyilir.

Vurma əməli aşağıdakı xassələrə malikdir:



**4.3. HADİSƏLƏRİN BİRLƏŞMƏSİ.**

 və  hadisələrinin birləşməsi elə hadisəyə deyilir ki, o ancaq və ancaq  və –dən heç olmasa biri yerinə yetdikdə baş verir.  və  hadisələrinin bir-ləşməsi  ilə işarə edilir. Deməli  birləşməsi  və hadisələrindən heç olmasa birinə daxil olan elementar hadisələrdən ibarətdir. Yəni,



Anoloji olaraq



bərabərliyi ilə verilən hadisəyə  hadisələrinin birləşməsi deyilir. Birləşmə əməli aşağıdakı xassələrə malikdir:



**Məsələ 2.** Hadisələrin birləşməsi və hasili əməllərinin aşağıdakı xassələrini ödədiyini isbat edin.



**Həlli.** Birinci iki xassə bilavasitə hadisələrin hasili və birləşməsinin tərifindən alınır. Belə ki, “ və  hadisələrinindən heç olmasa biri baş verdikdə” və “ və  hadiisələri eyni zamanda baş verdikdə “hadisələri bu hadisələrin ardıcıllığından asılı deyildir.

və hadisələrinin eynigüclü olduqlarını isbat edək.

Tutaq ki, . Hadisələrin hasilinin tərifinə əsasən . o deməkdir ki,  və hadisələrinindən heç olmasa birinə daxildir. Yəni, . Deməli, olduqda olar. Beləliklə, 

Indi isə fərz edək ki, . Deməli, və yaxud . Bu isə o deməkdir ki, və və hadisələrindən heç olmasa birinə daxildir. Hadi-sələrin hasilinin tərifinə əsasən 

**4.4. HADİSƏLƏRİN FƏRQİ VƏ TAMAMLAMA ƏMƏLİ**

 və  hadisələrinin fərqi



bərabərliyi ilə verilən hadisəyə deyilir. Deməli , – fərqi –nın baş verməsi, – nin isə baş verməməsi hadisəsidir.A hadisəsinin baş verməməsi hadisəsi A–nın tamamlayanı (əksi ) adlanır və  kimi işarə olunur.

Aşağıdakı münasibətlər doğrudur:



4.



**5. HADİSƏLƏRİN TAM SİSTEMİ.**

 hadisələr sistemi aşağıdakı üç şərti ödədikdə tam sistem adlanır:



2–ci və 3–cü şərtləri ödəyən hadisələr uyğun olaraq uyuşmayan və yeganə mümkün adlanır.

**Misal 1.** Yeşikdən bir məmulat götürülür. Məmulatın keyfiyyətli olması onun keyfiyyətsiz olmasını istisna edir. “məmulat keyfiyyətlidir” və “məmulat keyfiy-yətsizdir” hadisələri uyuşmayandır.

**6. HADİSƏLƏR ARDICILLIĞI VƏ ONUN LİMİTİ**

hadisələr ardıcıllığı :

a) şərtini ödədikdə artan,

b)  şərtini ödədikdə azalan,

c) artan və ya azlan olduqda monoton

d) 

v)  şərtlərini ödədikdə isə yox olan ardıcıllıq adlanır.

**Misal 1.** İstənilənhadisələri üçün artan, isə azalan ardıcıllıqdır.

**Misal 2.** Fərz edək ki, elementar hadisələr fəzası müstəvidir.ilə müvafiq olaraq təsadüfi seçilən  nöqtəsinin uyğun olaraq 1-1/n və 1+1/n radiuslu dairənin daxilində olması hadisələrini işarə edək.Başqa sözlə,



Asanlıqla göstərmək olar ki,  artan, isə azalan ardıcıllıqdır.

**7. CƏBR VƏ -CƏBR ANLAYIŞLARI**

Tutaq ki, ,  sınağı ilə bağlı elementar hadisələr fəzasıdır. Ehtimal nəzə-riyyəsində ehtimala hadisələrin funksiyası kimi baxılır. Lakin  fəzasının istənilən altçoxluğu üçün ehtimalı təyin etmək mümkün deyildir. Ehtimal anlayışı fəzanınm müəyyən hadisələri (altçoxluqları) sisteminə daxil olan hadisələr ( çoxluqlar) üçün təyin edilir. Buna görə də hadisələrin ehtimalını riyazi olaraq təyin etmək üçün belə hadisələr sistemi əvvəlcədən müəyyən edilməlidir.

Tutaq ki,  fəzasının hər hansı hadisələr ( altçoxluqları ) sistemi ilə işarə edilmişdir və bu sistem üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:



olur. Onda sisteminə hadisələr cəbri deyilir.

Hadisələr cəbrinin bir sıra xassələri vardır. fəzası sisteminə daxil olduğundan 2–ci şərtə görə  boş çoxluğu da  sisteminə daxildir. Hadi-sələrin cəmi və fərqi üçün qruplaşdırma xassəsi doğru olduğindan  sisteminə daxil olan sonlu sayda  hadisələrinin cəmi və hasili də həmin sistemə daxildir:



Bir çox məsələləri həll etmək üçün ehtimal nəzəriyyəsində hadisələr cəbri anlayışı ilə kifayətlənmək olar. Lakin bir sıra mürəkkəb məsələləri həll etmək üçün hadisələr cəbrinin əlavə bir xassəni də ödəməsi tələb edilir. Bu xassə, sistemin hesabi sayda hadisələrin cəmi və hasilinin yenə də həmin sistemə daxil olmasından ibarətdir:

3) 

Bu halda , yəni hadisələr cəbri 3) şərtini ödədikdə , ona –cəbr və yaxud Borel cəbri deyilir.

 sisteminə daxil olduğundan 2–ci şərtə görə  boş çoxluğu da  sisteminə daxildir. Hadisələrin cəmi və fərqi üçün qruplaşdırma xassəsi doğru olduğindan  sisteminə daxil olan sonlu sayda  hadisələrinin cəmi və hasili də həmin sistemə daxildir:



Tutaq ki,  –nın müəyyən alt çoxluqları sistemidir:

1) 

2) şərtini ödəyən istənilən  *-*cəbri üçün olarsa

–ə sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik *-*cəbr deyilir.

**Teorem 1.**İstənilən çoxluqlar sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik cəbri vardır.

**İsbatı.** Əvvəlcə qeyd edək ki,  sinfini öz daxilində saxlayan heç olmasa bir *-*cəbr vardır. Məsələn, belə bir cəbr olaraq –nın bütün altçoxluqları sinfini götürmək olar.  sinfini öz daxilində saxlayan bütün *-*cəbrlərin kəsişməsini  ilə işarə edək. Onda –də *-*cəbr olar. sinfini öz daxilində saxlayan istə-nilən*-*cəbri üçün olar. Beləliklə, , sinfini öz daxilində saxla-yan ən kiçik*-*cəbrdir .

**Misal 3.**Minimal cəbrə misal olaraq  və çoxluqlarından ibarət olan cəbri göstərmək olar.

**Həlli.** Doğrudan da,



olduğu üçün  cəbrdir.

**Teorem 2.**cəbrinin **-**cəbr olması üçün onun monoton sinif olması zəruri və kafidir.

Zərurilik. cəbri **-**cəbr olduqda o, eyni zamanda monoton sinifdir.

**Kafilik.** Tutaq ki, cəbri monoton sinifdir. Göstərək ki, olduqda olar.işarə edək. Aydındır ki, .cəbr olduğu üçün .  eyni zamanda monoton sinif olduğu üçün olar.

 sinfini öz daxilində saxlayan  monoton sinfi:

1) ;

2) sinfini öz daxilində saxlayan istənilən monoton sinfi üçün 

şərtləri ödənildikdə  monoton sinfi sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik monoton sinifadlanır.

**Teorem 3.** İstənilən  sinfi üçün onu öz daxilində saxlayan ən kiçik monoton sinif vardır.

**İsbatı.**  sinfini öz daxilində saxlayan heç olmasa bir monoton sinif vardır. Məsələn, belə bir sinif olaraq –nın bütün altçoxluqları sinfini götürmək olar.  sinfini öz daxilində saxlayan bütün monoton siniflərin kəsişməsini ilə işarə edək. Monoton siniflərin kəsişməsi də monoton sinif olduğu üçün  monoton sinifdir. sinfini öz daxilində saxlayan istənilən monoton sinfi üçün olar.Beləliklə,  sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik monoton sinifdir.

Ə D Ə B İ Y Y T S İ Y A H I S I .

1.Ə. Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, ”Maarif nəşriyyatı”, 1973.

2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çaşıoğlu, 2006.

**MÖVZU 2. EHTİMALIN XÜSUSİ VƏ AKSİOMATİK TƏRİFLƏRİ.**

**P L A N**

**1. Ehtimalın statistik tərifi.**

**2.Diskret elementar hadisələr fəzasında ehtimalın təyini.**

**2.1. Klassik ehtimalın təyini.Klassik sxem.**

**2.2.Qutu sxemi.**

**2.3.Sonlu və hesabi sayda nəticələri olan sınağın ehtimal modeli.Diskret sxemlər.**

**3. Sonlu və hesabi- additiv ehtimal ölçüləri.**

**4.Qeyri-hesabi sayda nəticələri olan sınaqların ehtimal modelinin qurulması.**

**4.1. Qeyri-hesabi sayda nəticələri olan sınaqların ehtimal modelinin qurulması.**

**4.2.Həndəsi ehtimal**

**5. Ehtimalın aksiomatik tərifi.**

**6.Şərti ehnimal.**

**6.1. Şərti ehtimal anlayışı.**

**6.2. Şərti ehtimalın xassələri**

**7. Ehtimalın vyrma düsturu.Tam ehtimal düsturu.Beyes düsturu.**

**8.Asılı olmayan hadisələr.**

1. **EHTİMALIN STATİSTİK TƏRİFİ**

Fərz edək ki,  təkrarən aparıla bilən sınaq ,  bu sınağın elementar hadi-sələr fəzası və  təsadüfü hadisədir. sınağını  dəfə apardıqda hadisəsinin baş verməsi sayını  ilə işarə edək. Başqa sözlə,  ədədi  sınaqda hadisəsinin baş verdiyi sınaqların sayıdır. Onda



nisbətinə  sınaqdan ibarət seriyada  hadisəsinin başvermə tezliyi deyilir.

Bir cox hallarda hadisənin tezliyini başqa bir hadisənin başverməsi şərti daxilində hesablamaq lazım gəlir.  hadisəsinin tezliyini  hadisəsinin başver-məsi şərtində hesabladıqda bütün sınaqları deyil, ancaq  hadisəsi başverən sı-naqları nəzərə almaq lazımdır.

Tutaq ki, aparılan  sayda sınaqda  hadisəsi  dəfə baş vermişdir.  say-da sınaqda isə  hadisəsi  başvermişdir. Onda  hadisəsinin  hadisəsinin baş-verməsi şərtində tezliyi  nisbəti kimi hesablanır. Bu tezlik bir qayda olaraq  hadisəsinin tezliyindən fəırqlənir. Bu tezliyə  hadisəsinin başverməsi şərtində  hadisəsinin nisbi tezliyi deyilir.



Müəyyn  sınağının təkrarı olan sınaqların müxtəlif seriyalarına baxaq. Fərz edək ki, *i* – ci seriya  sayda sınaqdan ibarətdir və bu seriyada  hadisəsi  dəfə baş vermişdir. Onda bu seriyada  hadisəsinin başvermə tezliyi



olar.

Aparılan sınaqlar göstərir ki, hadisələrin tezliyi aşağıdakı dayanıqlıq xas-səsinə malikdir:

Baxılan  hadisəsinin hər biri kifayət qədər çoxlu sayda sınaqdan ibarət olan müxtəlif seriyalardakı tezlikləri bir-birindən olduqca az fərqlənir və müəyyən bir sabit ədəd ətrafında ehtizas edir.

Tezliyin dayanıqlıq xassəsindən belə nəticə alınır***:***  sınağı ilə əlaqədar hər bir  hadisəsi üçün elə bir  ədədi vardır ki,  sınağını küllü miqdarda təkrarən apardıqda –nın tezliyi təxminən  ədədinə bərabər olur. Bu ədədə hadisəsinin statistik ehtimalı deyilir.

Tərifə görə,  hadisəsinin statistik ehtimalı  ədədi olarsa , onda  dəfə təkrar olunan sınaqda bu hadisə demək olar ki,  dəfə baş verir.

***Tezliyin xassələri.*** Fərz edək ki,  müəyyən sınaq,  və  isə bu sınaq ilə əlaqədar hadisələrdir. Hadisənin tezliyi aşağıdakı xassələrə malikdir:

1. Istənilən hadisənin tezliyi mənfi olmayan və vahidi aşmayan ədədidir. Mümkün olmayan hadisənin tezliyi sıfra, yəqin hadisənin tezliyı isə vahidə bərabərdir:

, 

1. Uyuşmayan hadisələrin cəminin tezliyi onların tezlikləri cəminə bəra-bərdir.



1. İki hadisənin hasilinin tezliyi onlardan birinin tezliyi ilə digərinin şərti tezliyi hasilinə bərabərdir.



Doğrudan da, tutaq ki,  sınaqda  hadisəsi  dəfə,  hadisəsi dəfə,  və hadisələri birlikdə  dəfə başvermişdir. Onda  və  hadisələrinin birgə başvermə tezliyi ,  hadisəsinin tezliyi ,  hadisəsinin  hadisəsinin baş-verməsi şərtində tezliyi olar:



Bu isə o deməkdir ki, 

 kifayət qədər böyük olduqda tezliyin dayanıqlıq xassəsinə görə  ehtimalından olduqca az fərqlənir. Buna görə də tezliyin yuxarıda göstərilən xassələrinin ehtimal üçün də ödənildiyini qəbul etmək təbiidir.

Beləliklə, staistik ehtimal



xassələrinə malikdir.

**2.DISKRET ELEMENTAR HADISƏLƏR**

**FƏZASINDA EHTIMALIN TƏYINI.**

**2.1. KLASSIK EHTIMALIN TƏYINI. KLASSIK SXEM.**

Aşağıdakı şərtlər ödənildikdə deyirlər ki, verilmiş sınağın  ehtimal modeli qurulmuşdur:

a)  elementar hadisələr fəzası təyin edilmişdir;

b) hər bir elementar hadisəsinə  şərtlərini ödəyən ehtimalı qarşı qoyulmuşdur.

Sonlu sayda  nəticələri olan sınağın ehtimal modelini quraq. Bu mo-dellərdən ən sadəsi “ Klassik ehtimal sxemi” adllanır.Bu sxemdə ehtimalın təyini sonlu sayda nəticələrdən hər birinin “eyniimkanlı” (eyni ehtimallı) olmasını nəzərdə tutulur.  ilə  hadisəsini təşkil edən elementar hadisələrin sayını işarə edək. Onda



nisbətinə  hadissəsinin klassik ehtimalı deyilir.

Beləliklə, eyniehtimallı sonlu elementar hadisələr fəzasında ixtiyari hadisənin ehtimalı, bu hadisəyə daxil olan elementar hadisələrin sayının elementar hadisələrin ümumi sayına nisbətinə bərabərdir.

 elementar hadisələrini mümkün hallar,  hadisəsini təşkil edən ele-mentar hadisələri isə bu hadisə üçün əlverişli hallar adlandırırlar. Deməli,  hadisəsinin ehtimalı bu hadisə üçün əlverişli olan halların ehtimalları cəminə bərabərdir. Əgər elementar hadisələr eyniehtimallı olarsa, onda hadisənin ehtimalı surəti bu hadisə üçün əlverişli olan halların sayına , məxrəci isə bütün mümkün halların sayına bərabər olan kəsrdir.

Ehtimalın klassik tərifindən aydın olur ki, elementar hadisələrin hamısının daxil olduğu  yəqin hadisəsinin ehtimalı vahidə bərabərdir:



**Teorem 1.** Uyuşmayan  hadisələrinin birləşməsinin ehtimalı onların ehtimalları cəminə bərabərdir.

**İsbatı.** Doğrudan da,  və  hadisələrinin ehimalları müvafiq olaraq  və  - ə bərabərdir:

, 

 hadisəsi sayda elementar hadisələrdən ibarətdir və  elementar hadisələrindən heç biri  çoxluğuna daxil deyildir. Ona görə də klassik ehtimalın tərinə əsasən



Bu teoremə klassik ehtimal üçün ehtimalların toplanması qanunu da deyilir.

**Nəticə 1.** 

Döğrudan da, və  hadisələri uyuşmayan hadisələr, onların birləşməsi isə yəqin hadisədir:



Ehtimalların toplanması qanununa görə



Buradan isə  olur.

Mümkün olmayan hadisə yəqin hadisənin tamamlayanı olduğu üçün buradan xüsusi halda mümkün olmayan hadisənin klasik ehtimalının sıfra bərabər olduğu alınır.

**2.2.Qutu sxemi.**

Elementar hadisələrin eyniehtimallı və sonlu sayda olması tələbləri klassik ehtimalın tətbiqini məhdudlaşdırır. Bir çox hallarda elementar hadisələrin eyni-ehtimallı olmasını təyin etmək çox çətin olur. Bəzən də xarici görünüşcə oxşar olan müxtəlif elementar hadisələrə bir hal kimi baxılması səhvinə yol verilir. Göstərilən nöqsanlarla yanaşı kllassik ehtimal özünün sadəliyi ilə fərqlənir və onu tətbiq etmək üçün kombinator analizin bəzi düsturlarını bilmək kifayətdir.

Klassik sxemin tətbiqinin məhdudluğuna baxmayaraq o, bir sıra vacib praktiki məsələlərin həllində geniş surətdə istifadə edilir.sayda elementdən ibarət çoxluğa baxaq. Bu çoxluğun təbiəti bizi maraqlandırmır. O, müəyyən əlamətə malik və malik olmayan : məsələn, keyfiyyətli və keyfiyyətsiz məmularlar çoxlu-ğu, hər biri nəmli və yaxud nəmişli olan toxumlar çoxluğu və s. ola bilər. Bu cür hallar qutu sxemi vasitəsilə təsvir edilir:

Qutuda sayda ağ, sayda isə qara şar vardır. Bəzi hallarda məmulatın keyfiyyətini yoxladıqda o, sıradan çıxır. Məsələn,məhsulun keyfiyyətinə nəzarəti həyata keçirərkən nəzarət əməliyyatı nəticəsində məhsul satış üçün yararsız hala düşür. Bu halda məmulatların hamısının deyil, onların müəyyən hissəsinin key-fiyyəti yoxlanılır. Tutaq ki, qutudan təsadüfü qaydada  şar çıxarılmışdır. Çıxa-rılan şarlardan  sarın ağ şar olması hadisəsinin ehtimalını hesablayaq.  şardan  şarı  üsulla seçmək olar. Deməli, mümkün halların sayı –dir. Çıxarılan şar-lardan  şarın ağ şar olması hadisəsi () üçün əlverişli halların sayını tapaq.  ağ şardan  şarı üsulla,  qara şardan isə - şarı üsulla seçmək olar. Onda əlverişli halların sayı olar. Beləliklə, klassik ehtimalın tərifinə görə axtarılan ehtimal 

olar

**2.3. SONLU VƏ YAXUD HESABI SAYDA NƏTICƏLƏRI OLAN SINAĞIN EHTIMAL MODELI. DISKRET SXEMLƏR.**

Sınağın nəticələri sonlu sayda olduqda ona sonlu, sonlu və yaxud hesabi sayda olduqda isə diskret sxem deyilir.

Nəticələri eyniimkanlı olmayan sonlu sxemin ehtimal modelini quraq. Bu halda sınağın nəticələri sonlu sayda elementar hadisələrindən ibarət  coxluğudur. Bu model hər bir  elementar hadisəsinə və  şərtlərini ödəyən  ehtimalının qarşı qoyulması ilə təyin edilir.

Tutaq ki, –sınaq zamanı müşahidə edilən istənilən hadisədir. Bu *A* hadisə-sinin ehtimalı onu təşkil edən elementar hadisələrin ehtimalları cəmi kimi təyin edilir:



Məsələn,  olduqda



Qurulmuş model sonlu sayda eyniimkanlı nəticələri olan klassik sxemin ehti-

mal modelinin ümumiləşməsidir. Belə ki, hər bir elementar hadisəsinin ehtima-lını  kimi təyin etsək ehtimalın klassik tərifini alarıq.

Sonlu sxemlər üçün də ehtimalların toplanması qanunu doğrudur.

**Teorem 2.** uyuşmayan hadisələr oduqda



**İsbatı.**Tərifə görə . və  hadisələri uyuşmayan olduğu üçün onların ortaq elementar hadisələri yoxdur.



olar.

Deməli, 

**Teorem 3.**İstənilən  və  hadisələri üçün



**İsbatı.** ehtimalı  və  hadisələrindən heç olmasa birinə daxil olan elementar hadisələrin ehtimalları cəmidir. Bu zaman elementar hadisə eyni zaman-da  və –yə daxil olduqda bir dəfə götürülür.Ona görə də



Elementar hadisə eyni zamanda  və –yə daxil olduqda o, axırıncı bəra-bərsizliyin sağ tərəfinə iki, sol tərəfinə isə bir dəfə daxil olur. Ona görə də sağ tərəf sol tərəfdən  qədər böyükdür.

Beləliklə,



İndi isə hesabi sayda nəticələri olan təsadüfü sınağa baxaq. Bu halda elementar hadisələr fəzası  olar. Diskret sxemin ehtimal modelində hər bir  elementar hadisəsinə ,şərtlərini ödəyən  qarşı qoyulur.

Hesabi sayda elementar hadisələrdən ibarət olan  hadisəsinin ehtimalı isə klassik sxemdə olduğu kimi onu təşkil edən elementar hadisələrin ehtimalları cəmi kimi təyin edilir.



Bu qayda ilə təyin edilmiş ehtimal aşağıdakl xassələrə malikdir.



uyuşmayan hadisələr olduqda



Doğrudan da,



Diskret sxem sonlu sxemin ehtimal modelinin ümumiləşməsidir.

Ehtimal nəzəriyyəsi elementar hadisəsinin  ehtimalının hesablanmasını öyrənmir. Bu ehtimalların təyinində elementar hadisənin müxtəlif seriyalardakı küllü miqdarda aparılmış sınaqlarda tezliyi əsas götürülür. Eyni zamanda ehtimal nəzəriyyəsi  ehtimal modelinin adekvatlılığını da öyrənmir. O, ancaq qurul-muş  modeli ilə bağlı hadisələrin ehtimalının hesablanmasını öyrənir.

**3. Sonlu və hesabi- additiv ehtimal ölçüləri.**

Tutaq ki,  –nın müəyyən alt çoxluqlarının cəbridir. –da təyin edilmiş **** çoxluq funksiyası

****

şərtlərini ödədikdə ona sonlu – additiv ehtimal ölçüsü deyilir.

3)–cü xassədən riyazi induksiya metodunun köməyi ilə istənilən  hadisələri üçün  olduqda



olduğunu almaq olar.

olduğu üçün 2) və 3) –cü xassələrə əsasən



və yaxud 

olduğunu yaza bilərik.

 cəbrində təyin edilmiş **** çoxluq funksiyası





şərtlərini ödədikdə ona hesabi–additiv ehtimal ölçüsü deyilir.

Hansı şərtlər daxilində sonlu–additiv ehtimal ölçüsünün hesabi–additiv olma-sına aşağıdakı teorem cavab verir.

**Teorem 4.** Tutaq ki**,** –cəbrindəsonlu–additiv ehtimal ölçüsüdür.Onda aşağıdakı dörd şərt ekvivalentdir.

1) **** hesabi–additivdir, yəni**** olduqda



2) **** azalmayan çoxluqlar ardıcıllığı və **** olduqda

****

3) **** artmayan çoxluqlar ardıcıllığı və ****olduqda

****

4) ** -**da kəsilməyəndir, yəni ****və **** olduqda

****

**İsbatı.** Teoremin isbatını aşağıdakı ardıcıllıqla verək: . Buradan isə 1), 2), 3), 4) şərtlərinin ekvivalehtliyi alınır.

Tutaq ki, **** azalmayan çoxluqlar ardıcıllığıdır. 1) –dən



alınır.

Beləliklə, 1) –dən 2) alınır.

İsbat edək ki, 2)-dən 3) alınır.Tutaq ki, **** artmayan çoxluqlar ardıcıllığıdır. Onda  azalmayan çoxluqlar ardıcıllığıdır. 2) –yə görə



İsbat edək ki, 3) –dən 4) alınır. olduğu üçün istənilən

artmayan və **** şərtini ödəyən ardıcıllıq üçün 3)–cü xassəyə görə 

İsbat edək ki, 4) –dən 1) alınır.

Tutaq ki, **** kəsişməyən çoxluqlar ardıcıllığıdır və . Onda 

Sonlu–additivlik xassəsinə görə



 olduğuna görə 

Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, 2) və 3) xassələrini aşağıdakı kimi də ifadə etmək olar:

**** monoton çoxluqlar ardıcılığı üçün .

Bu xassə hesabi–additiv ehtimal ölçüsünün kəsilməyənlik xassəsi adlanır.

Fərz edək ki, –hər hansı elementar hadisələr fəzası, isə onun altcoxluq-larından təşkil edilmiş cıxluqlar sistemidir.

**4**.**QEYRI-HESABI SAYDA NƏTICƏLƏRI OLAN SINAQLARIN EHTIMAL MODELININ QURULMASI.**

**4.1. QEYRI-HESABI SAYDA NƏTICƏLƏRI OLAN SINAQLARIN**

**EHTIMAL MODELININ QURULMASI.**

Qeyri hesabi sayda nəticələri olan stoxastik sınaqlara baxaq. Bu cür sınaqların ehtimal modelinin qurulması ilə tanış olaq.

Nöqtənin  intervalına atılmasından ibarət təsadüfü sınağa baxaq.Bütün mümkün nəticələrin “eyniimkanlı” olduğunu qəbul edək. Bu sınağın elementar hadisələr fəzası  olar. Ancaq bu halda hər bir elementar hadisənin ehti-malını təyin etməklə sınağım ehtimal modelini qurmaq olmaz. Diskret sxemə uyğun olaraq hər  elementar hadisəsinə onun ehtimanı qarşı qoysaq bütün nəticələr eyniimkanlı” olduğu üçün hər  elementar hadisəsi üçün  olar. Bu halda çıxış yolu bütün elementar hadisələrin deyil, onların müəyyən çoxlu-ğunun ehtimalını təyin etməkdən ibarətdir. Eyni zamanda ehtimallar təyin edilərkən müəyyən prinsiplər gözlənilməlidir:   intervallarına düşmə ehtimallarının eyni olduğunu qəbul etmək lazımdır. intervalına düşmə ehti-malı  intervalına düşmə ehtimalından böyük olmalıdır. Bundan başqa ehtimalları təyin edilən coxluqlar sinfinin birləşmə, kəsişmə və tamamlama əməllərinə görə qapalı olmaları arzu ediləndir.,,,,coxluqlarının da ehtimalları təyin edilməlidir. Nöqtənin intervalına düşmə ehtimalını fərqi kimi təyin edək. Sonlu sayda kəsişməyən intervalların cəminin  ehtimalını isə  kimi təyin edək. ilə  şəklində bütün intervalları və onların kəsişməyən sonlu sayda cəmini işarə edək. ilə –nı öz daxilində saxlayan minimal **–cəbri işarə edək***.*** Ehtimalın davamı haqqında teo-remə görə yeganə ehtimal ölçüsü vardır ki, şərti ödənilir. Təsa-düfü hadisə olaraq  çoxluğunun borel coxluqlarını götürək, hadisəsinin ehtimalını isə  qəbul edək.

Beləlilə, biz sınağın ehtimal modelini qurduq.

**Görüş haqqında məsələ.** Tutaq ki, iki nəfər  zaman kəsiyində görüşməyi qərara alıblar. Görüş yerinə biriinci gələn digərini  müddəti ərzində gözləyir, sonra isə gedir. ilə müvafiq olaraq birinci və ikinci şəxsin görüş yerinə gəlmə müddətini işarə edək.Onda sınağın elementar hadisələr fəzası 

olar. İntuitiv olaraq sınağın bütün nəticələrinin eynimkanlı olduğunu qəbul edək və görüşün baş tutması ehtimalını hesablayaq.

Bu məsələdə hər bir elementar hadisənin ehtimalını təyin etməklə ehtimal mo-delini qurmaq olmaz. Əvvəlcə  düzbucaqlısına daxil olan çoxbucaq-lıları təsadüfü hadisə olaraq qəbul edək. Hər bir coxbucaqlıya isə  eh-timalını qarşı qoyaq. ilə coxbucaqlılar sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik –cəbri işarə edək. –cəbrindən olan hər bir C coxluğuna isə ehti-malını qarşı qoyaq. Beləliklə, biz sınağın  ehtimal modelini qurduq. Bizi maraqlandılran  hadisəsinin ehtimalı 

olar. Xüsusi halda  olduqda axtarılan ehtimal



olar.

**4.2.Həndəsi ehtimal.**Nəzəriyyə və təcrübədə nəticələri sonlu sayda və ya eyniehtimallı olmayan sınaqların öyrənilməsi ehtiyacları klassik ehtimalın məh-dudluğunu göstərdi. Klassik ehtimalın tətbiq edilə bilmədiyi bir sinif ehtimal məsələləri üçün həndəsi ehtimal anlayışı verilmişdir.

Kəsilməz elementar hadisələr fəzasında ehtimalın təyininə həndəsi ehtimalın misalında baxaq. Tutaq ki, elementar hadisələr fəzası müstəvidə sahəsi olan hər hansı oblastıdır. Bu oblastın sahəsi olan altcoxluqlarını hadisə olaraq götürək. Göstərmək ilar ki, belə altçoxluqlar sinfi cəbrdir. Bu halda hər bir  hadisəsinin ehtimalını  kimi təyin etmək olar.

Beləliklə, biz sınağın  ehtimal modelini qurduq. Bu düstur ilə hesab-lanan ehtimal həndəsi ehtimal adlanır. Bu düsturda  oblastı mümkün olan eyniehtimallı halların,  isə əlverişli halların çoxluğu rolunu oynayır.

Sonlu sxemdə olduğu kimi asanlıqla göstərmək olar ki, təsvir edilən sxem ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarını ödəyir.

Həndəsi ehtimal üçün 1–3 xassələrinin doğruluğu bilavasitə onun tərifindən alınır. Lakin klassik ehtimalı sıfır olan hadisə mümkün olmayan hadisədir təklifi həndəsi ehtimal üçün doğru deyildir. Məsələn, müstəvinin müəyyən oblastından təsadüfi götürülən bir nöqtənin həmin oblstın daxilində yerləşən müəyyən bir parçanın nöqtəsi olması hadisəsinin ehtimalı sıfırdır.

**5. Ehtimalın aksiomatik tərifi.**

Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarını ifadə edərkən tezliyin və ehtimalın xassələri əsas götürülür.

Tutaq ki,  elementar hadisələr fəzasıdır,  isə onun müəyyən alt çoxluq-larının -cəbridir.Yəni,



–cəbrinin hər bir çoxluğuna təsadüfü hadisə deyilir. –cəbrində təyin edilmiş ədədi funksiya aşağıdakı şərtləri ödədikdə ona ehtimal deyilir:

***Aksiom 1.*** hır bir  üçün .

***Aksiom 2***. Yəqin hadisənin ehtimalı vahidə bərabərdir



***Aksiom 3***.Cüt-cüt uyuşmayan  hadisələrin cəminin ehtimalı onların ehtimalları cəminə bərabərdir:



Bu aksiomlar ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomları adlanır. Onları ilk dəfə gör-kəmli rus riyaziyyatçısı ***A.N. Kolmoqorov*** vermişdir. Bu aksiomlar ehtimal nəzə-riyyəsinin və onun bir sıra sahələrinin surətli inkişafında müstəsna əhəmiyyətə malik olmuşdur.

***Aksiom 1 və Aksiom 3***-ə görə –cəbrində təyin edilmiş  funksiyası şərtini ödəyən ölçüdür.Bu ölçüyə ehtimal ölçüsü deyilir. üçlüyünə isə ehtimal fəzası deyilir.  elementar hadisələr fəzası, təsadüfü hadisələrin –cəbri və –də təyin edilmiş  ehtimal ölçüsü verildikdə, yəni  ehtimal fəzası qurulduqda deyirlər ki, sınağın ehtimal modeli qurulmuşdur.

Göstərək ki, sonlu sxem ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarını ödəyir.Qeyd edək ki, sonlu sxem elementar hadisələrin sonlu  coxluğunda verilir və onların hər birinin ehtimalı və şərtlərini ödəyir. –nın altçoxluğu olan istənilən  hadisəsinin ehtimalı isə kimi təyin edilir.

–nın bütün altçöxluqlar sinfi cəbrdir. Döğrudan da,  və ,-nın altçoxluğu oldüqları üçün –ə daxildirlər. Aydındır ki, olduqda onların birləşməsi və kəsişməsi də –ya daxildir.

Sonlu sxemin birinci aksiomu ödədiyini yoxlayaq. Bu məqsədlə –nın altçoxluğu olan istənilən hadisəsini götürək. Sonlu sxemə görə . Deməli, 

 olduğu üçün ikinci aksiom da ödənilir. Ehtimalların toplanması teoreminə görə isə üçüncü aksiom ödənilir.

**EHTİMALIN XASSƏLƏRİ.**

Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarından istifadə etməklə ehtimalın bir sıra mü-hüm xassələrini isbat etmək olar.

**Teorem 5**. İstənilən  hadisəsi üçün 

Doğrudan da, olduğu üçün 3–cü aksioma görə



Buradan isə, olar.

**Nəticə 1.** Mümkün olmayan hadisənin ehtimalı sıfra bərabərdir, yəni .

 bərabərliyində  götürsək, 

Buradan isə



**Teorem 6.** olduqda 

**İsbatı.**  hadisəsini uyuşmayan iki hadisələrinin cəmi şəklində göstərək: .

Onda



Buradan isə olduğunu alırıq.

**Nəticə 1.** olduqda 

olduqda  hadisəsini iki uyuşmayan hadisənin cəmi şəklində göstərmək olar:



Onda



Ehtimal mənfi olmayan ədəd olduğu üçün  olar.

**Nəticə 2.** İstənilən hadisəsi üçün 

Doğrudan da, İstənilən  hadisəsi üçün .Ona görə də



**Nəticə 3.** 

olduğuna görə  və  olar.Buradan isə



olar.

Eyni qayda ilə münasibətlərindən aşağıdakı nəticəyə gəlirik.

**Nəticə 4.** 

**Teorem 5.** İstənilən və  hadisələri üçün



**İsbatı.** hadisəsini uyuşmayan üç hadisənin cəmi şəklində gğstərmək olar.



olar. Onda aksiom 3-ə və teorem 2-yə görə görə



olar.

Bu münasibətə ehtimalların toplama qanunu deyilir.

Bu düsturu üç hadisə üçün yazaq:



Beləliklə,



**Nəticə 1**. və  üyuşmayan hadisələr oldüqda



və  hadisələri uyuşmayan olduğu üçün n = və

=+

**Nəticə 2.**

Bu xassə əvvəlki teoremdə ehtimalın mənfi olmamasını nəzərə almaqla alınır.

Altıncı xassə istənilən  hadisələri üçün də ümumiləşdirilir.

.

**Teorem 6.** hadisələrindən heç olmasa birinin baş verməsi ehtimalı



Bu düstur riyazi induksiya üsulunun köməyi ilə asanlıqla isbat olunur. Doğ-rudan da,  olduqda bu düstur



düsturuna çevrilir. Onun  üçün doğru olduqda  üçün də doğru olduğunu gös-tərək.

Tutaq ki, bu düstur istənilən  sayda hadisə üçün doğrudur:

 ;





düsturuna görə



olduğunu yaza bilərik.

**Nəticə 1*.*** Fərz edək ki, hadisələrinin ixtiyari  dənəsinin birlikdə başvermə ehtimalı yalnız bu hadisələrin sayından asılıdır və ədədinə bərabərdir. Onda



**Teorem 7.**  monoton artan hadisələr ardıcıllığıdır. Yəni

 olduqda



monoton azalan hadisələr ardıcıllığıdır, yəni

olduqda



Monoton hadisələr ardıcılllığının limiti anlayışından istifadə edərək

 olduğunu yaza bilərik. Ona görədə bu teoremi ehtimalın kəsilməyənlik xassəsi adlandırırlar.

**Teorem 8.**İstənilən sonlu və ya hesabi sayda hadisələri üçün





bərabərsizlikləri doğrudur.

**İsbatı.**işarə edək. Asanlıqla yoxlamaq olar ki,



hadisələri cüt–cüt uyuşmayan hadisələr və  olduğu üçün



 olduğunu nəzərə alsaq



bərabərsizliyinin doğru olduğunu yaza bilərik.

**Teorem 8.** Tutaq ki,  və hadislərindən ancaq birinin baş verməsi hadi-səsidir.Onda



**İsbatı.**  hadisəsini uyuşmayan iki vəhadisələrinin cəmi şəklində gös-tərək. =. Digər tərəfdənvə 

olduğu üçün =.

,  hadisələrinin uyuşmayan və olduğunu nəzərə alsaq





olduğunu yaza bilərik.

Beləliklə, 

**Kəsilməməyənlik teoremi 9.** İstənilən hadisələr ardılcıllığı üçün



bərabərliyi doğrudur.

**Kəsilməməyənlik aksiomu.** Əgər ,... hadisələr ardıcıllığında hər bir hadisə özündən əvvəlki hadisəni doğurursa və bu hadisələrin hasili mümkün olmayan hadisədirsə , onda

 olduqda

Yuxarıda deyilənlərdən aydın olur ki, nəzəri-ehtimal sxemlər konkret ele-mentar hadisələr fəzası, onun cəbr təşkil edən kokret altçoxluqları sinfi və bu cəb-rin çoxluqlarının ehtimalı, yəni  üçlüyü ilə verilir.  üçlüyünə ehti-mal fəzası, –də təyin edilmiş ehtimalına isə elementar hadisələr fəzasın-da ehtimalların paylanması deyilir.

**6.ŞƏRTİ EHTİMAL**

**6.1.ŞƏRTİ EHTİMAL ANLAYIŞI**

Aydındır ki,  hadisəsinin  ehtimalı haqqında ancaq müəyyən şərtlər kompleksi yerinə yetirildikdə, yəni sınaq aparıldıqdan sonra danışmaq olar. Sına-ğın aparılma şərtləri dyişildikdə həmin sınaq dəyişir, başqa sınaq alınır və nəticədə hadisənin ehtimalı da dəyişir. Məsələn,  hadisəsinin ehtimalının hesablanmasın-da aparılan sınağın şərtlərinə yeni bir şərti – hadisəsinin başverməsi şərtinidə əlavə etsək, onda başqa bir ehtimal -  hadisəsinin başverməsi şərtinidə hadi-səsinin şərti ehtimalını alırıq. Beləliklə, təcrübədə bir çox hallarda  hadisəsinin ehtimalını başqa bir  hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində hesablamaq lazım gəlir. Bu cür ehtimala şərti ehtimal deyillir.  hadisəsinin baş verməsi şərtində  hadisəsinin şərti ehtimalı  kimi işarə edilir.

Tutaq ki,  elementar hadisədən –i  hadisəsi, saydası isə  hadisəsi üçün əlverişlidir.Onda



Fərz edək ki,  hadisəsi başverdikdə  hadisəsi üçün əlverişli halların sayı dir.Onda kllasik ehtimalın tərifinə  hadisəsinin şərti ehtimalı



olar. Axırıncı bərabərlikdə kəsrin surət və məxrəcini –ə bölsək, şərti ehtimal üçün =

düsturunu alarıq.

 hadisəsi üçün əlverişli halların sayı  olduğu üçün mütləq ehtima-ldır.

Beləliklə,  hadisəsinin baş verməsi şərtində  hadisəsnin şərti ehtimalı



kimi hesablanılır.

**6.2. Şərti ehtimalın xassələri**.

Şərti ehtimalın aşağıdakı xassələri vardır:

1.

2.

3.

4.

5.olduqda 

6.

7.

Bu xassələr mütləq ehtimalın uyğun xassələrindən alınır

**8.EHTİMALIN VURMA DÜSTURU. TAM EHTİMAL DÜSTURU. BEYES DÜSTURU.**

**8.1.EHTİMALIN VURMA DÜSTURU.**

B hadisəsinin baş verməsi şərtində A hadisəsinin şərti ehtimalı



düsturu ilə hesablanılır. Buradan, hadisəsinin P(B) şərtsiz ehtimalı məlum olduqda ,  və  hadisələrinin eyni zamanda baş verməsinin ehtimalını təyin etmək olar:

Fərz edək ki,  hadisələri



şərtlərini ödəyir.Onda aşağıdakı düstur doğrudur:



Doğrudanda



olar.

**8.2.TAM EHTİMAL DÜSTURU**

**Teorem.** Fərz edək ki,  hadisələri tam sistem təşkil edir.Onda ixtiyari  hadisəsi üçün



**İsbatı.** Doğrudanda ehtimalın toplama və vurma düsturlarına əsasən yaza bilərik:



**Məsələ 3.** Fabrikdə birinci maşının buraxdığı 100 məmulatdan orta hesabla 90–ı, ikinci maşında 95–i və üçüncü maşında 85–i yararsız olur.rayonun maqazinlərinə göndərilən məhsulun 50%–i birinci, 30%–i ikinci və 20%–i üçüncü maşında hazırlanır. Alınan məhsulun yararsız olma ehtimalını təyin edin.

**Həlli.** Alınan məhsulun yararsız olmasını  ilə, onun *i*–ci maşında hazır-lanmasını isə  ilə işarə edək. Onda





**8.3.BEYES DÜSTURU.**

 hadisəsi  hadisələrindən biri başverdikdə başverir və sınaq nəticəsində  hadisəsi başvermişdir. Sınaqdan əvvəl  hadisələrinin  ehtimalları və  hadisəsinin  hadisələrinin hər birinə görə  şərti ehtimalları məlumdur. hadisəsinin baş verməsi  hadisəsinin ehtimalına necə təsir edir?

Bu məsələni həll etmək üçün



bərabərliklərindən istifadə edək.

Buradan



bərabərliyi və tam ehtimal düsturuna əsasən



münasibəti alınır.

Axırıncı bərabərliyə Beyes düsturu deyilir. Sınaqdan əvvəl hesablanan  ehtimalları apriori ( mənası «əvvəlki», burada sınaqdan əvvəlki ) olan apriori latın sözündən götürülmüşdür) ehtimallar, sınaqdan sonra hesablanan  ehtimalları isə aposteriori (mənası sonrakı) olan aposteriori latın sözündən götürülmüşdür.) ehtimallar adlanır.

Burada baxılan  hadisələrinə bəzən fərziyyələr, Beyes düstu-runa isə fərziyyələr teoremi deyilir.

Beyes dusturu hadisəsi başverdikdən sonra  hadisələrinin başverməsi haqında fərziyyələrin ehtimallarını yenidən qiymətləndirməyə imkan verir.

**9. ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR.**

**İki hadisənin asılı olmaması:** Əgər  hadisəsinin baş verməsi hadisəsinin baş verməsi ehtimalına təsir etmirsə onda deyirlər ki,  hadisəsi hadisəsindən asılı deyildir. Başqa sözlə  olduqda deyirlər ki, hadisəsi  hadisə-sindən asılı deyildir.



olduğu üçün asılı olmayan hadisələr üçün



olar.

Tutaq ki, . Eyni qayda ilə  olduqda deyirlər ki,  hadisəsi hadisəsindən asılı deyildir. Buradan yenə də



olduğunu alırıq. Bu münasibət və-yə görə simmetrikdir və onların ehtimalları sıfır olduqda da mənası vardır.

 olduqda deyirlər ki, vəhadisələri asılı və yaxud statistik asılı deyillər.

Hadisələrin asılı olmaması haqqında aşağıdakı təklifləri söyləmək olar:

**Teorem 10.** və asılı olmayan hadisələr olarsa , onda cüt-lərindən hər birini təşkil edən hadisələr də asılı olmaz.

**İsbatı.**  hadisələrinin asılı olmadıqlarını göstərmək kifayətdir. Qeyd edək ki, 

Ona görə də   və hadisələri asılı olmadıqlarını nəzərə alsaq



olduğunu yaza bilərik. Deməli,  vəhadisələri asılı olmayan hadisələrdir.

Hadisələrin asılı olmaması haqqında aşağıdakı təklifləri söyləmək olar:

 olduqda  bərabərliyi  və hadisələrinin asılı olmaması üçün zəruri və kafidir.

Tutaq ki, vəasılı olmayan müsbət ehtimallı hadisələrdir. Bu halda  və  uyuşandır.

Doğrudanda,  olarsa, =o olar. Bu isə şərtə ziddir.

vəhadisələrinin asılı olmaması

==

bərabərliyi ilə eynigüclüdür.Burada 

Qeyd edək ki, və uyuşmayan hadisələr və olduqda onların asılı hadisələr olar. vəhadisələri uyuşmayan olduğu üçün

 və ,



Beləliklə, və asılı hadisələrdir.

**Teorem 11.**  və;  və hadisələri asılı olmayan, vəuyuşmayan hadisələr olduqda  və hadisələri asılı olmayan hadisələrdir.

**Isbatı.** Doğrudan da,



və hadisələri uyuşmayan olduqları üçün



Beləliklə,



**Bir neçə hadisənin asılı olmamsı**

,...,hadisələrindən istənilən ikisi asılı olmadıqda onlara cüt-cüt asılı olmayan hadisələr deyilir.



,...,hadisələri üçün  indekslərinin bütün mümkün kombinasiyaları üçün sayda



, ,



yəni



bərabərlikləri ödənildikdə qarşılıqlı ( birgə) asılı olmayan hadisələr adlanır.

Qeyd edək ki, cüt–cüt asılı olmayan hadisələr qarşılıqlı asılı ola bilər. Bu mənada hadisələrin qarşılıqlı asılı olmaması anlayşı cüt-cüt asılı olmamaq anlayışından daha güclüdür.Məsələn, eyniehtimallı elementar hadisələr fəzasında



hadisələri buna misal ola bilər.Doğrudan da,



bərabərlikləri A,B və C hadisələrinin cüt-cüt asılı olmadığını,



bərabərliyi isə onların qarşılıqlı asılı olduğunu göstərir.

Hadisələrin asılı olmaması haqqında aşağıdakı təklifləri söyləmək olar:

1. *n* sayda hadisələrin asılı olmaması, bu hadisələrdən istənilən saydasını onların tamamlayıcı hadisələri ilə əvəz etdikdə dəyişmir.
2. asılı olmayan hadisələr olarsa, onlardan götürülən ixtiyari r sayda hadisələri də asılı olmayacaqdır.



1. Asılı olmayan hadisələrindən heç olmasa birinin baş vermə ehtimalı



kimi hesablanılır.

**MÖVZU 3 . ARDICIL TƏKRAR SINAQLAR. BERNULLİ SXEMİ**

**P L A N**

**1.Bernulli düsturu və Bernulli teoremi.**

**1.1.Bernulli sınaqları.**

**1.2. Bernulli düsturu və Bernulli teoremi.**

**2.Binomial paylanma üçün asimptotik düsturlar.**

**2.1.Puasson teoremi**

**2.2. Muavr – Laplasın lokal teoremi**

**2.3 Muavr – Laplasın inteqral teoremi**

**3.** **Muavr\_Lapalasın inteqral teoreminin tətbiqləri**

**1.Bernulli düsturu və Bernulli teoremi.**

**1.1.Bernulli sınaqları.**

Tutaq ki, müəyyən şərtlər kompleksi daxilində ardıcıl sınaqlar aparılır.Əgər hər bir sınağın nəticəsi digər sınağın nəticəsinə təsir etmirsə, onda belə sınaqlara asılı olmayan sınaqlar deyilir.

Aparılan asılı olmayan hər sınağın nəticəsi “uğurlu” və ya “uğursuz” ola bilər, yəni gözlənilən təsadüfiü A hadisəsi baş verər, yaxud baş verməyə bilər.Asılı olmayan sınağın iki nəticəsindən birinin baş verməsi halına Y.Bernulli baxmışdır və onu Bernulli sxemi adlandırırlar.

***Tərif***. Eyni bir sınağın təkrarından ibarət sınaqlar aşağıdakı iki şərti ödədikdə, Bernulli sınaqları adlanır:

1. sınaqlar asılı olmayandırlar;
2. hər bir sınağın yalnız iki nəticəsi vardır və bu nəticələrin ehtimalı bütün sınaqlar üçün eynidir;
3. Bernulli sınağının nəticələrindən birini şərti olaraq “+”, digərini isə

“–“adlandıraq.

**1.2.Bernulli düsturu və Bernulli teoremi.**

Tutaq ki, *n* sayda asılı olmayan sınaq aparılır və hər bir sınaqda A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı sabit p ədədinə, baş verməməsi ehtimalı isə *q=1–p* ədədinə bərabərdir. *i*–ci sınağın nəticəsini ilə işarə edək.Bu ardıcıllığın m hissəsində A hadisəsi, qalan *n–m* hissəsində isə olarsa, belə ardcıllıqların sayı olar.



Sınaqlar asılı olmadıqlarından onların nəticələri–hadisələr də asılı deyillər və ehtimalların vurulması qaydasına görə belə ardıcıllığın ehtimalı ədədinə bərabər olar.Onda uyuşmayan (birgə olmayan) hadisələrin ehtimalları haqqında qaydaya görə *m*–qədər *A*–dan və *n–m* qədər –dən ibarət ardıcıllıqların ehtimalları cəmi



olar.

Aparılan *n* Bernulli sınağında “+” nəticənin baş vermə sayını ilə işarə edək. Beləliklə aşağıdakı nəticəyə gəlirik:



**Bernulli düsturu.** Tutaq ki, aparılan *n* Bernulli sınağında müsbət nəticənin başvermə sayı –dir. Hər sınaqda müsbət nəticənin baş vermə ehtimalı isə *p*– dir. Bu halda



ehtimallarına binomial paylanma deyilir.Bu paylanma *m=0,1,..., n* ədədləri ilə –lər arasında uyğunluq şəklində verilir. (1) ehtimalı binomunun ayrılışında –nın əmsalına bərabər olduğuna görə, ona binomial ehtimal deyilirlər. Binomial ehtimalların çoxluğu binomial paylanma, *n* və *p* sabitləri isə onun para-metrləri adlanır.



**Məsələ 1.** Hər 100 yeni doğulan uşaqdan orta hesabla 51–i oğlan, 49–u isə qız olur. Bir ailədə 3 uşaq var. Onlardan heç olmasa ikisinin oğlan olma ehtimalını tapın.

**Həlli.** Bu məsələdə, *n=3, p=0.51, q=0.49*–dur.Bernulli düsturuna əsasən axtarılan ehtimal



olacaqdır. Deməli, 3 uşaqlı 100 ailədən orta hesabla 515–də heç olmasa iki oğlan olacaqdır.

**Binomial paylanmanın xassələri:**

1) 

Bu münasibətin doğruluğunu iki mülahizədən almaq olar. Birincisi, n ardıcıl asılı olmayan sınaqlar zamanı hadisələr ardıcıllıqları tam sistem təşkil edir və onlardan hər hansının baş verməsi yəqin hadisədir.İkincisi, axırıncı münasibətin doğruluğu



binomunun açılışından alınır.

2) ehtimalı *m*–dən asılı funksiya kimi özünün ən büyük qiymətini *(n+1)p* ədədi kəsr olduqda *(n+1)p* ədədinin tam qiymətində, tam ədəd olduqda isə *m=(n+1)p* və *m=(n+1)p-1* qiymətlərində alır.



***Tərif.*** ehtimal özünün ən böyük qiymətini qiymətində alarsa, onda ədədi binomial paylanmanın modası, isə maksimal ehtimal adlanır.



**Məsələ 2 .** 729 tələbəsi olan fakultədə nə qədər tələbənin yanvarın birində anadan olması ehtimalı ən böyükdür.

**Həlli.** (702; 1/365) parametrli binomial paylanmadan istifadə edə bilərik.

(n+1)p=(729+1)\*1/365=2

olduğuna görə, ən böyük ehtimallı ədəd 2 və 1, maksimal ehtimal isə



olacaqdır.

3) *n* sayda Bernulli sınaqlarında müsbət nəticənin *r*–dən az syda baş verməsi ehtimalını kimi hesablamaq olar.



**2. BİNOMİAL PAYLANMA ÜÇÜN ASİMPTOTİK DÜSTURLR.**

Ehtimal nəzəriyyəsində ehtimalı üçün müxtəlif asimptotik düsturlar verilmişdir. Burada Puasson və Muavr–Laplas düsturları ilə tanış olacayıq.



***2.1.Puasson teoremi).***



Bu münasibət hər bir *k*–ya görə müntəzəm ödənilir.

**İsbatı.** Bu münasibət aşağıdakı bərabərliklərdən alınır:



Teoremə əsasən n kifayət qədər böyük, p isə kifayət qədər kiçik olduqda



asimptotik bərabərliyi doğrudur.

Bu düsturdan adətən olduqda istifadə edilir.



* 1. ***Muavr – Laplasın lokal teoremi***

*n*–in kifayət qədər böyük qiymətlərində Bernulli düsturundan istifadə texniki cəhətdən çətinlik yaradır. Laplasın lokal teoremi ehtimalları hesablamaq üçün asimptotik yaxınlaşma düsturudur. ( olduqda, deyirlər ki, *f(x)* –n asimptotik yaxınlaşmasıdır).



Qeyd edək ki, xüsusi halda *p=1/2* üçün asimptotik düstur 1730–cu ildə Muavr tərəfindən alınmışdır. 1783 cü ildə isə Laplas bu düsturu istənilən 

üçün isbat etmişdir***.***

***Teorem.*** Əgər asılı oımayan sınaqlar zamanı müsbət nəticənin baş veməsi ehtimalı, *p* sabitdirsə, onda



doğrudur, burada və x müəyyən sonlu parçada dəyişdikdə bütün *k=0,1,...,n* qiymətlərində yığılma müntəzəmdir.



Teoremə əsasən aparılan n sınaqda hadisənin m dəfə baş verməsi ehtimalı təqribən



bərabərliyi ilə təyin edilir.

–in müsbət qiymətləri üçün funksiyasının qiymətləri cədvəli işlənib hazırlanmışdır. tək funksiya olduğu üçün –in mənfi qiymətləri üçün də həmin cədvəldən istifadə etmək olar.



**Məsələ 3*.*** Qeyri standart detalın hazırlanması ehtimalı *0.004*–dür. *1000* detal-dan beşinin qeyri standart olması hadisəsinin ehtimalını təyin edin.

**Həlli.** Bu məsələdə,



Puasson düsturuna əsasən



İndi isə bu ehtimalı Muavr–Laplas düsturuna əsasən hesablayaq:



Muavr–Laplas düsturuna əsasən axtarılan ehtimalın təqribi qiyməti



Bu ehtimalın Bernulli düsturuna əsasən tapılmış dəqiq qiyməti isə



olar.

Beləliklə, ehtimalının Muavr–Laplasın təqribi düsturuna əsasən hesablanmış nisbi xətası və ya 13.6%, Puasson düsturuna əsasən isə və ya *0.7%* təşkil edir.



***2.3. Muavr – Laplasın inteqral teoremi.***

Aparılan n sayda Bernulli sınağında “ müsbət” nəticənin baş vermə sayının müəyyən parçada yerləşməsi ehtimalını hesablamaq üçün asimptotik düsturu Muavr–Laplasın inteqral troremindən almaq olar.

***Teorem.***



münasibəti müntəzəm ödənilir.



funksiyasına Laplas funksiyası deyilir.

Laplas funksiyasının müsbət *x*–lər üçün qiymətləri cədvəli işlənib hazır-lanmışdır. Bu funksiya tək funksiyadır, yəni



şərti ödənilir.Bu isə o deməkdir ki, funksiyasının mənfi *x*–lər üçün qiymətlərini axırıncı düsturun köməyi ilə hesablamaq olar.



Cədvəldə funksiyasının qiymətləri  üçün verilmişdir. olduqda qəbul ertmək olar.



Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən istifadə etmək üçün münasibətini aşağıdakı kimi yazaq:



Qeyd edək ki, hadisəsi hadisəsi ilə eynigüclü hadisədir.Ona görə də asılı olmayan n sınaqda hadisənin ən azı , ən çoxu isə dəfə başverməsi ehtimalınl təqribən bərabərliyi ilə hesablamaq olar.



Burada .



**Məsələ 4.**Sığorta şirkətində *10000* abtomobil sığorta edilmişdir.Qəza nəticə-sində istənilən avtomobilin sıradan cıxma ehtimalı *0.006*–dır.Sığorta edilmiş hər bir avtomobilin sahibi ildə *12* manat sığota haqqı ödəyir və avtomobilin sıradan cıxması nəticəsində çirkətdən *1000* manat alır.

İlin sonunda

a) şirkətin bankrot olması hadisəsinin,

b) ən azı *40000* manat mənfəət əldə etməsi ehtimalını təyin edin.

**Həlli.** a) Tutaq ki, il ərzində *n* sayda avtomobil qəza nəticəsində sıradan cıxmışdır. Şirkətin bankrot olması üçün onun avtomobil sahiblərinə ödədiyi məbləğ il ərzində ödənilmiş sığorta haqqından cox olmalıdır.Bu isə o deməkdir ki,



bərabərsizliyi ödənilməlidir. Bu bərabərsizliyi *n* –ə görə həll etsək və *n*–in tam ədəd olduğunu nəzərə alsaq  olduğunu alarıq.

Beləliklə, şirkətin bankrot olması üçün il ərzində ən azı 120 avtomobil qəza nəticəsində sıradan çıxmalıdır. Bu isə il ərzində 120, yaxud 121,..., yaxud da 10000 avtomobilin sıradan cıxması deməkdir.Beləliklə, baxılan halda qəbul etmək lazımdır.



1287.116



Bu halda axtarılan ehtimal



b) Sığorta şirkətinin il ərzində 40000 manat mənfəət əldə etməsi üçün



bərabərsizliyi ödənilməlidir.Buradan isə olduğunu alırıq.



Bu halda = ədədi ən azı 79 avtomobilin sıradan çıxması hadisəsinin ehtimalıdır. Ən çoxu 78 avtomobil sıradan şıxdıqda şirkət ən azı 40000 manat mənfəət əldə edər. Bu hadisələr qarşılıqlı hadisələr olduğu üçün axtarılan ehtimal olar.



***3. Muavr***–***Lapalasın inteqral teoreminin tətbiqləri.***

Asılı olmayan n sayda sınaqların hər birində A hadisəsinin baş vermə ehtimalı *p* ədədinə bərabərdir.

Muavr–Laplasın inteqral teoremini bərabərsizliyinin ehtimalının qiymətləmdirməsinə tətbiq edək.

Bu məqsədlə işarə edək. n in böyük qiymətlərində ehtimalını tapmaq olar:



Deməli, Muavr – Laplasın inteqral teoremininə görə



Beləliklə aşağıdakı teoremin doğruluğunu alırıq.

***Bernulli teoremi***. Tutaq ki, aparılan n Bernulli sınaqlarında müsbət nəticənin baş vermə sayı , hər bir sınaqda müsbət nəticənin baş vermə ehtimalı isə *p*–dir. Bu halda



bərabərliyi doğrudur.

*A* hadisəsinin *p* baş vermə ehtimalına əsasən əvvəcədən onun həqiqətən baş verməsi və ya baş verməməsi haqqında qəti fikir söyləyə bilmərik. Lakin külli miqdarda təcrübələrdə aşağıdakı faktın doğruluğu aşkar edilmişdir: ehtimalı vahidə yaxın hadisələr sanki hökmən baş verir, ehtimalı sıfra yaxın olan hadisələr isə çox nadir hallarda baş verir.Birinci növ hadisələri praktiki yəqin, ikinciləri isə praktiki mümkün olmayan hesab edirlər.Hadisənin praktiki mümkün olmaması üçün onun ehtimalı nə dərəcədə kiçik olmalıdır? Bu suala birqiymətli cavab vermək olmaz, çünkü burada baxılan hadisənin nə dərəcədə əhəmiyyətli olması nəzərə alınmalıdır.Məsələn, riyazi statistikada ehtimalı *0.001* və *0.005* sərhədləri arasında yerləşən hadisələr praktiki mümkün olmayan hesab edilir.

Bernulli teoremi təsdiq edir ki, külli miqdarda sınaqların seriyasında hadisələrin tezliyi ilə onun ehtimalı arasında fərqin istənilən qədər kiçik olması praktiki yəqin hadisədir.Beləliklə, bu teorem ehtimalın statistik tərifini əsaslandırır.

Bernulli teoremi 1713-cü ildə müəllifin ölümündən 8 il sonra latın dilində nəşr edilmişdir.Mütəxəssislər bu teoremi ehtimal nəzəriyyəsinin inkişafında mühüm kəşf kimi qiymətləndirmişlər.

Akademik B.V. Qnedenko: “ Bernulli teoremini mübaliğəsiz ehtimal nəzəriyyəsinin bir elm kimi varlığının başlanğıcı hesab etmək olar”.

Akademik A.A.Markov: Böyük ədədlər qanununun başlanğıcını qoyan teorem, birinci dəfə Bernullinin işində çap və isbat edilmişdir.Y. Bernulli özünün teoremini dəqiq söyləmiş və tam ciddiliklə isbat etmişdir

**1.** A hadisəsinin başvermə tezliyinin p ehtimalından kənarlaşmasının ədə-dini aşmaması hadisəsinin ehtimalını tapın.Bu ehtimal aşağıdakı kimi hesablanır:



Beləliklə, =



Axırıncı bərabərkikdə dörd parametr var. Onlardan üçü məlum olduqda dördüncüsünü tapmaq olar



Ə D Ə B İ Y Y T S İ Y A H I S I .

1.Ə. Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, ”Maarif nəşriyyatı”, 1973.

2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çaşıoğlu, 2006.

**MÖVZU 4. TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTlLƏR.**

***P L A N***

**1.TƏSADÜFÜ KƏMIYYƏT ANLAYIŞI.**

**2.TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTİN PAYLANMA FUNKSİYASI**

**3.PAYLANMA FUNKSİYASININ XASSƏLƏRİ**.

**4. DİSKRET VƏ KƏSİLMƏZ PAYLANMALAR**

**4.1.DISKRET PAYLANMALAR. DISKRET TƏSADÜFÜ KƏMIYYƏTIN PAYKLANMA QANUNU.**

**4.2.KƏSILMƏZ PAYLANMALAR.SIXLIQ FUNKSIYASI VƏ ONUN XASSƏLƏRI.**

**5. TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTDƏN ASILI FUNKSİYALAR.**

**MÖVZU 3. TƏSADÜFÜKƏMİYYƏTlLƏR.**

**1.TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏT ANLAYIŞI.**Hadisə və onun ehtimalı kimi təsadüfü kəmiyyət anlayışı da ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir.Hər bir sınağın nəticəsinə təsadüfü kəmiyyət kimi baxa bilərik. Təsadüfü kəmiyyət, baxılan hadisəni keyfiyyət və kəmiyyətcə xarakterizə edən və təsadüfü amillərin təsiri ilə bu və ya digər şəkildə müxtəlif qiymətlər ala bilən kəmiyyətlərdir.Təsadüfü kəmiyyətin hansı qiymət alacağını qabaqcadan qəti demək mümkün deyildir.Onun hər bir sınaqda aldığı qiymətlər müxtəlif səbəb və təsadüflərdən asılı olaraq dəyişir.

Sınağın nəticəsini keyfiyyətcə xarakterizə etmək o deməkdir ki, sınaq zamanı konkret əlamət

Fakt qeyd olunur və onun nəticəsinin əlamətə malik olub- olmadığı müəyyənləşdirilir.Qeydə alınan bu əlamət hadisə adlanır və deyirlər : “hadisə baş verdi”, ya da “hadisə baş vermədi”.

Sınağın nəticəsini kəmiyyətcə xarakterizə etmək o deməkdir ki, sınaq zamanı hər hansı kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlər müəyyən olunur, belə ki, həmin qiymətləri sınağa qədər təyin etmək mümkün deyildir. Belə kəmiyyətlər təsadüfi adlanır.

Deməli, təsadüfü kəmiyyət sınaq nəticəsində bu və ya digər qiymət ala biləcək dəyişən kəmiyyətdir.

**Misal 1.** Bir zəri bir dəfə atmaqdan ibarət olan sınaqda yuxarı düşən üzdəki xallar sayını ilə işarə edək. –təsadüfü kəmiyyətdir. Bu kəmiyyət *1,2,3,4,5,6* qiymətlərinin birini ala bilər, lakin hansı qiyməti alacağını qabaqcadan demək mümkün deyildir.



**Misal 2.** Müəyyən zaman müddətində telefon stansiyasına gələn siqnalların sayı təsadüfü kəmiyyətdir. Bu kəmiyyət *0,1,2,...* qiymətlərinin hər birini ala bilər.

**Misal 3.** İstənilən bir tələbənin boyunun uzunluğu və ya çəkisi təsadufi kəmiyyətdir.Bu kəmiyyət hər hansı sonlu intervaldakı bütün qiymətləri ala bilər.

**Misal 4.** Doğulan uşaqlar içərisində oğlanların sayı təsadüfü kəmiyyətdir. O, *0,1,2,..., 100* qiymətlərini alır.

Misallardan aydındır ki, sınaqları kəmiyyətcə xarakterizə edən təsadüfü *X* kəmiyyətnin qabaqcadan hansı qiymətləri alacağılnı qəti demək mümkün deyildir.Təsadüfü kəmiyyətin ancaq ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu göstərilir.Bu qiymətlər sonlu, hesabi və qeyri hesabi çoxluq təşkil edə bilər. Əgər təsadüfü kəmiyyət sonlu və ya hesabi sayda izolə edilmiş qiymətlərini ala bilirsə, ona diskret təsadüfü kəmiyyət deyilir. Birinci iki misalda baxılan X kəmiyyəti diskret təsadüfü kəmiyyətdir.Təsadüfü kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlər hər hansı sonlu və ya sonsuz intervalı təşkil edirsə, ona kəsilməz təsadüfü kəmiyyət deyilir.Üçüncü misalda baxılan təsadüfi kəmiyyət kəsilməz təsadüfi kəmiyyətdir.



Diskret və kəsilməz olmayan təsadüfü kəmiyyətlər də vardır.Bundan başqa, bir intervalda kəsilməz olan təsadüfü kəmiyyət başqa bir intervalda diskret ola bilər.

Tutaq ki, metal pul iki dəfə atılır. Bu snağın riyazi modelini quraq.Sınağın nəticələri olan elementar hadisələr aşağıdakı kimi olar: =GG( hər iki metal pulda qerb üzü düşmüşdür); GP, (RG), (RR).Beləliklə, elementar hadisələr fəzası şəklində olar.



ilə metal pulu iki dəfə atdıqda qerb üzünün düşməsi sayını işarə edək. kəmiyyəti elementar hadisənin funksiyasıdır:



Sınağın nəticəsi təsadüfdən asılı olduğu üçün –nın qiymətləri təsadüfü kəmiyyətdir. funksiyası elementar hadisələr fəzasında təyin edilimiş təsadüfü kəmiyyətdir.



Metal pul simmetrik olduqda elementar hadisələr eyniimkanlı olduğu üçün sınağın riyazi modelində ehtimallarının olduğunu qəbul etmək təbiidir. Bu ehtimallar məlum olduqda təsadüfü kəmiyyətinin bu və ya digər qiymət alması hadisəsinin ehtimalını hesablamaq olar.Məsələn, hadisəsinin ehtimalını hesablayaq.Bu hadisə GP, (RG) hadisələrindən biri baş verdikdə baş verir.Yəni, .Onda



**Misal 5.** Oyun zəri bir dəfə atılır. Bu zaman elementar hadisələr fəzası olar.Zərin yuxarı düşən üzündəki xalların sayı– təsadüfü kəmiyyəti elementar hadisənin funksiyasıdır və



**Misal 6.** Metal pul gerb üzü düşənə qədər atılır. Bu halda



Tutaq ki, –zərin atılma sayıdır.Onda -n qiyməti elementar hadisənin fuknsiyasıdır və



**Misal 7.** Texniki qurğunun saz işləmə müddətinin təyin edilməsindən ibarət olan sınağa baxaq. Tutaq ki, anında işə salınan qurğunun anına qədər sıradan çıxması əvvəlcədən məlumdur və olduqda anında saz vəziyyətdə olan qurğunun anına kimi sıradan çıxma ehtmalı -dən asılı deyil və ilə mütənasibdir.Deməli, zaman kəsiyinin istənilən anında texniki qurğunun sıradan çıxması eyniehtimallıdır. Bu sınağın riyazi modelini quraq.



ilə elementin t müddətinə qədər qurğunun saz işləməsi və anında sıradan çıxması elementar hadisəsini işarə edək.Qurğunun sıradan çıxma təsadüfü anı -, elementar hadisəsinin funksiyasıdır,



elementar hadisələr çoxluğu diskret çoxluq deyilidir.Onun elemetlərini nömrələmək olmaz.Bu cür çoxluqlara qeyri hesabi çoxluqlar deyilir. –cəbrini mümkün hadisələr çoxluğu kimi təyin edək. Burada ilə parçasına daxil olan hadisələrin sonlu və yaxud hesabi sayda cəmləri və hasilləri işarə edilmişdir. –cəbrində ehtimalı təyin edək. olduqda götürək. Burada , intervalının uzunluğudur.



Baxılan misallar göstərir ki, təsadüfü kəmiyyətə stoxastik sınağın elementar hadislər fəzasında təyin edilmiş funksiya kimi baxmaq olar. Elementar hadislər fəzası sonlu və ya hesabi çoxluq olduqda burada təyin edilmiş istənilən funksiya təsadüfü kəmiyyətdir.Ancaq elementar hadisələr fəzası qeyri hesabi çoxluq olduqda –da təyin edilmiş istənilən funksiyaya təsadüfü kəmiyyət kimi baxmaq olmaz.



Bir çox məsələlərin həllində təsadüfü kəmiyyətə elementar hadisələrin funksiyası kimi baxmağa ehtiyac yoxdur.Bu halda təsadüfü kəmiyyətlə bağlı hadisələrin ehtimalını bilmək kifayətdir.Beləliklə, ədəd oxunun kifayət qədər geniş çoxluqlar sinfi üçün təsadüfü hadisələri –cəbrinə daxil olmalıdır.Bu halda ehtimalına baxmaq olar. şərtinin ödənilməsi üçün isə çoxluğunun –cəbrinə daxil olması kifayətdir.



Tutaq ki, hər hansı ehtimal fəzası verilmişdir.Bu o deməkdir ki, elementar hadisələr fəzası, onun –cəbr olan hadisələr sistemi və bu sistem üzərində təyin edilmiş P(A) ehtimalı göstərilmişdir.Tutaq ki, elementar hadisələr fəzasında təyin edilmiş funksiya, isə istənilən həqiqi ədəddir. çoxluğunun şərtini ödəyən bütün elementləri çoxluğunu və ya qısaca olaraq ilə işarə edək.



***Tərif 1.*** elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş və istənilən həqiqi ədədi üçün



şərtini ödəyən funksiyasına təsadüfi kəmiyyət deyilir.



Təsadüfü kəmiyyətləri latın əlifbasının böyük hərfləri, onların ala biləcəyi qiymətləri isə kiçik ilə işarə edəcəyik.



Elementar hadisələr fəzası sonlu olduqda təsadüfü kəmiyyət elementar hadisələrdə aldığı qiymətlə təyin edilir.Aşağıdakı cədvəldə elementar hadisələr, onların ehtimalları və 1-ci misaldakı təsadüfü kəmiyyətin qiymətləri verilmişdir.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| I | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | *GG* | *GP* | *PG* | *PP* |
|  | *¼* | *¼* | *1/4* | *¼* |
|  | *2* | *1* | *1* | *0* |

Cədvəldən göründüuü kimi, təsadüfü kəmiyyət müxtəlif elementar hadisələrdə eyni qiymət ala bilər. Baxılan misalda



Yuxarıda qeyd edilidiyi kimi, bir çox hallarda təsadüfü kəmiyyətə elementar hadisələrin funksiyası kimi baxmaq əvəzinə bu təsadüfü kəmiyyətlə bağlı hadisələrin ehtimalını bilmək, yəni onun paylanma qanununu bilmək kifayətdir. Sonli və ya hesabi sayda intervalların birləşməsi vəyaxud kəsişməsindən ibarət olan həqiqi ədədlər çoxluğunun istənilən çoxluğu üçün ehtimalı verildikdə deyirlər ki, *X* təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu verilmişdir.



**2.TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTİN PAYLANMA FUNKSİYASI**

Təsadüfü kəmiyyətləri ancaq onların ala bildiyi qiymətlər çoxluğunu göstər-məkıə təyin etmək mümkün deyildir. Belə ki, qiymətlər çoxluğu eyni olan, lakin bu qiymətləri müxtəlif ehtimallarla alan müxtəlif təsadüfü kəmiyyətlər vardır.Buna görə də, təsadüfü kəmiyyətin verilməsi üçün onun ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu və həm də bu qiymətləri hansı ehtimalla aldığı göstərilməlidir.

Bu məqsədlə təsadüfü kəmiyyətin paylanma funksiyasına baxılır.

Istənilən həqiqi üçün çoxluğu –cəbr olan sisteminə daxil olduğundan, onun ehtimalı təyin olunmuşdur.Bu ehtimala – təsadüfü kəmiyyətinin –dən kiçik qiymət alması hadisəsinin ehtimalına həmin kəmiyyətin paylanma funksiyası deyilir və



kimi işarə edilir.

**Misal 8.**Tutaq ki, metal pul bir dəfə atılır.Bu halda ;––nın bütün alt çoxluqlar çoxluğudur,



;



**3.PAYLANMA FUNKSİYASININ XASSƏLƏRİ**.

1. Paylanma fuksiyasının qiymətlər oblastı parçasıdır:



Bu xassə paylanma fuksiyasının hadisəsinin ehtimalı, hadisənin ehtimalının isə mənfi olmayan və vahidi aşmayan ədəd olmasından alınır.



Verilmiş təsadüfiü kəmiyyətlə bağlı olan bir çox hadisələrin ehtimalını həmin təsadüfü kəmiyyətin paylanma funksiyası vasitəsilə hesablamaq olar.

2. təsadüfi kəmiyyətinin yarımintervalında qiymət alması hadisəsinin ehtimalı paylanma funksiyasının və nöqtələrindəki qiymətləri fərqinə bərabərdir:



təsadüfü kəmiyyətinin -dən kiçik qiymət alması hadisəsini iki uyuşmayan hadisənin cəmi şəklində göstərək:



Onda ehtimalların toplanma qanununa görə



olar.Buradan isə 2–ci xassə alınır.

3.Paylanma fuksiyası azalmayandır.

Doğrudan da, hadisənin ehtimalı mənfi ədəd olmadığından, istənilən üçün .



Belıliklə,



4.



hadisəsi hadisəsinin tamamlayanı olduğu üçün



5. olduqda



Tutaq ki, artan ardıcıllıqdır və olduqda. uyuşmayan hadisələr ardıcıllığına baxaq:



Aydındır ki, hadisəsini hadisələrinin cəmi şəklində göstərmək olar:



Onda ehtimalların toplanma qanununa görə



Aydındır ki, .Ehtimalın Kolmoqorov aksijmlarına görə



olduğunu alırıq.

6.olduqda,



Tutaq ki, monoton azalan ardıcıllıqdır və olduqda. hadisələr ardıcıllığı kəsilməyənlik aksiomunun şərtlərini ödəyir:



və



Onda



7.Paylanma funksiyaı istənilən nöqtədə soldan kəsilməyəndir, yəni istənilən nöqtəsində



,



bərabərliyi ödənilir.

Monoton azalan ardıcıllığına baxaq və işarə edək.Aydındır ki, və istənilən üçün şərtini ödəyən olmadığı üçün . Kəsilməyənlik aksiomuna görə .



2-ci xassəyə əsasən .Beləliklə, axırıncı bərabərlyin hər iki tərəfində olmaqla limitə keçsək



olduğunu alarıq.

Bu xassələr paylanma funksiyasını tamamilə təyin edir.İsbat etmək olar ki, verilmiş funksiyasının müəyyən təsadüfü kəmiyyətinin paylanma funksi-yası olması üçün onun *1,3,5,6,7* xassələrini ödəməsi zəruri və kafidir. Bu təklifdən aşağıdakı nəticə alınır:



***Nəticə.*** Həqiqi dəyişənli funksiyası



şərtlərini ödədikdə



funksiyası paylanma funksiyasıdır.

Hər bir təsadüfü kəmiyyət öz paylanma funksiyasını birqiymıtli təyin edir. Lakin paylanma funksiyasının verilməsilə təsadüfü kəmiyyət birqiymətli təyin edilmir. Hər təsadüfü kəmiyyətin ancaq bir paylanma funksiyası olduğu halda , bir funsiya müxtəlif təsadüfiü kəmiyyətlərin paylanma funksiyası ola bilər.

**4. DİSKRET VƏ KƏSİLMƏZ PAYLANMALAR.**

Təsadüfü kəmiyyətin tamamilə təyin olunması üçün onun aldığı qiymətlər çoxluğu və bu qiymətləri hansı ehtimalla alması göstərilməlidir. Təsadüfü kəmiy-yətin paylanma funksiyası bu mənada onu tamamilə xarakterizə edən ən universal vasitələrdən biridir. Təsadüfü kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlərlə , bu qiymətlərə uyğun ehtimallar arasında əlaqə başqa üsullarla da verilə bilər.

Təsadüfiü kəmiyyətin mümkün qiymətləri ilə onlara uyğun ehtimallar arasında əlaqə yaradan hər bir münasibətə təsadüfü kəmiyyətin paylanma qanunu deyilir.Təsadüfü kəmiyyətlərin paylanma qanunları müxtəlif formalarda olsa da, onların hamısndan paylanma funksiyasını almaq həmişə mümkün olmalıdır. Təsadüfü kəmiyyətin ehtimalının paylanma qanunu bir sıra hallarda daha aydın və əlverişli şəkillərdə verilir. Bunların iki əsas növü ilə tanış olaq.

**4.1. Diskret paylanmalar. Diskret təsadüfü kəmiyyətin**

**paylanma qanunu.**

Tutaq ki, təsadüfiü kəmiyyətinin aldığı sonlu və ya hesabi sayda qiymətləri və bu qiymətləri alma ehtimalları



verilmişdir. Cüt–cüt uyuşmayan



hadisələri tam sistem təşkil etdiyindən şərti ödənilir.



Diskret təsadüfü kəmiyyətinin aldığı qiymətlərinin və bu qiymətləri almasının ehtimallarının göstərilməsi onun paylanma qanununu təyin edir.Diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu cədvəl şəklində verilir:



Bu cədvələ diskret təsadüfü kəmiyyətin ehtimallarının paylanma cədvəli deyilir.

Diskret təsadüfü kəmiyyətin paylanma qanunu cədvəl şəklində verildikdə onun paylanma funksiyası



kimi tapılır. funksiyası nöqtəsində kəsiləndir və bu nöqtədə sıçrayışı ədədinə bərabərdir:



**4.2.Kəsilməz paylanmalar. Sıxlıq funksiyası və onun xassələri.**

Əgər təsadüfü kəmiyyətinin qiymətlər çoxluğu hesabi çoxluq deyilsə, onda belə kəmiyyətin paylanmasını onun ayrı-ayrı qiymətlərinin ehtimalları ilə vermək mümkün deyildir.Bu paylanmanı ehtimalın nisbi sıxlığı vasitəsi ilə vermək daha əlverişlidir.



**Tərif 2.**təsadüfi kəmiyyətinin ala biləcəyi qiymətin intervalına düşməsi ehtimalının bu intervalın uzunluğuna olan nisbətinin, yəni,



nisbətinə kəmiyyətinin paylanmasının nisbi sıxlığı və ya ehtimalın nisbi sıxlığı deyilir.Nisbi sıxlığın olduqda limitinə kəmiyyətinin nöqtəsində sıxlı-ğı deyilir və ) ilə işarə olunur:



Axırıncı bərabərliyi şəklində yazaq.



Məlumdur ki, fərqi təsdadüfü kəmiyyətin intervalın-dan qiymət alması hadisəsinin ehnimalıdır və təqribən funksiyasının diferen-sialına bərabərdir.



olduğu üçün



Axırıncı təqribi bərabərliyin ehtimal mənası aşağıdakı kimidir:Təsadüfü kəmiyyətin intervalından qiymət alması hadisəsinin ehtimalı kifayət qədər dəqiqliklə sıxlıq funksiyasının nöqtəsindəki qiyməti ilə bu intervalın uzunluğu hasilinə bərabərdir.



Bu nəticəni həndəsi olaraq təsadüfü kəmiyyətin intervalından qiymət alması hadisəsinin ehtimalı oturacağı , hündürlüyü isə olan düzbucaqlının sahəsinə bərabərdir kimi söyləmək olar.



Kəsilməz təsadüfü kəmiyyətin ehtimalının paylanması paylanma funksiyası vasitəsilə təyin edilir.Paylanma funksiyalarının quruluşu isə əsasən mürəkkəb və müxtəlifdir.Lakin elə kəsilməz təsadüfü kəmiyyətlər vardır ki, onların paylanma funksiyası , müəyyən xassəsi olan başqa bir funksiyası vasitəsilə



kimi sadə şəkildə verilir.Ehtimalın paylanması ilə əlaqədar olan məsələləri belə tasadüfü kəmiyyətlər vasitəsilə öyrənmək daha əlverişlədir.

***Tərif 3.*** Paylanma funksiyası şəklində olan təsadüfü kəmiyyə-tinə, mütləq kəsilməz təsadüfü kəmiyyət , funksiyasına isə onun ehtimalının paylanma sıxlığı və ya sadəcə olaraq sıxlıq funksiyası deyilir.



Praktikada təsadüf olunan kəsilməz paylanma funksiyaları bir qayda olaraq şəklində göstərilə bilir, yəni mütləq kəsilməz funksiyalardır.Buna görə də mütləq kəsilməz təsadüfü kəmiyyətləri sadəcə olaraq kəsilməz təsadüfü kəmiyyətlər adlandırırlar.(lakin bunları qarışdırmaq olmaz)



Sıxlıq funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır:



.



Burada istənilən Borel çoxluğudur.



Üçüncü xassə nüqtəsində kəsilməz olduqda doğrudur.Onun doğruluğu yuxarı sərhəddi dəyişən olan müəyyən inteqrralın törəməsi haqqındakı teoremdən alınır.



) bərabərliyindən istənilən üçün



münasibəti alınır.

bərabərliyindən istənilən x üçün



münasibəti alınır.Buradan aydın olur ki, ixtiyari kəsilməz təsadüfü kəmiyyəti



münasibətlərini ödəyir.

Kəsiməz təsadüfü kəmiyyətin sıxlıq funksiyası verildikdə onun paylanma funksiyası bərabərliyi ilə tapılır.Paylanma funksiyası isə təsadüfü kəmiyyətin ehtimalının paylanma qanununu təyin edir.Buradan aydındır ki, kəsilməz təsadüfü kəmiyyətinin ehtimalının paylanma qanunu onun sıxlıq funksiyasının verilməsi ilə tamamilə təyin edil



**5. TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTDƏN ASILI FUNKSİYALAR.**

kəsilməz təsadüfü kəmiyyət olduqda təsadüfü kəmiyyətinin paylanma və sıxlıq funksiyalarını tapaq.



Əvvəlcə halına baxaq.Bu halda funksiyası monoton artan funksiyadır. Deməli,



Buradan isə



olduqda funksiyası monoton azalandır.Onda



Buradan isə



Beləliklə, olar.



**Məsələ 1.** kəsilməz təsadüfü kəmiyyət və olduqda təsadüfü kəmiyyətinin paylanma və sıxlıq funksiyalarını tapın.



**Həlli.** olduqda ,



olduqda



Buradan



Yuxarıda deyilənləri ümumiləşdirərək aşağıdakı teoremin doğruluğunu isbat etmək olar.

**Teorem** . kəsilməz təsadüfü kəmiyyət , kəsilməz və monoton fun-ksiya olduqda təsadüfü kəmiyyətinin paylanma , sıxlıq funksiyası isə . şəklində olar.



**İsbatı.**  kəsilməz və monoton funksiya olduqda onun tərs funksiyası vardır.Onda təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası



olar.Beləliklə,



funksiyası diferensiallanan olduqda təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası funksiyasının birinci tərtib törəməsinə bərabərdir.



Fərz edək ki, funksiyası kəsilməz və monoton azalan funksiyadır.Onda onun tərs funksiyasıda monoton azalandır. təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası



olar. funksiyası diferensiallanan olduqda



və



olduğunu nəzərə alsaq



alarıq. Beləliklə, funksiyası monoton və diferensiallanan olduqda kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası



şəklində olar.

**MÖVZU 5. BIRÖLÇÜLÜ PAYLANMALAR.**

**NORMAL PAYLANMA ILƏ BAĞLI PAYLANMALAR.**

**P L A N**

**1.Birölçülü diskret paylanmalar.**

**1.1. Puasson paylanması**

**1.2.Həndəsi paylanma.**

**1.3.Hiperhəndəsi paylanma.**

**2.Birölçülü kəsilməz paylanmalar.**

**2.1.Müntəzəm paylanma**

**2.2.Normal aylanma.**

**2.3. Üç siqma qanunu.**

**2.4.Loqarifmik normal paylanma. Pareto paylanması.**

**3. Normal paylanma ilə bağlı paylanmalar.”**

**3.1.” Xi – kvadrat” paylanma**

**3.2.Fişer – Snedekor paylanması.**

**3.3. Styudent paylanması**

**4.Styudent, Fişer və “xi-kvadrat” paylanmaya malik bəzi xarak-**

**teristikalar.**

**1.Birölçülü diskret paylanmalar.**

**1.1. Puasson paylanması**

təsadüfü kəmiyyəti *k=0,1,2,....* qiymətlərini uyğun olaraq



ehtimalı ilə alırsa, onda ona λ parametrli Puasson kəmiyyəti deyilir.

ardıcıllığına λ parametrli Puasson paylanması deyilir.



Puasson paylanması nəzəriyyədə və əməli fəaliyyətdə (məsələn; fizikada, biologiyada, etibarlılıq və kütləvi xidmət nəzəriyyəsində) geniş tətbiq edilir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,



**1.2. Həndəsi paylanma**

Fərz edək ki, n sayda asılı olmayan sınaq aparılır və hər sınaqda A hadisəsinin baş vermə ehtimalı *p*-yə bərabərdir. Bu o deməkdir ki, hər hansı sınaqda A hadisənin baş verməsi (baş verməməsi) növbəti sınaqlarda həmin hadisənin baş verməsinə təsir etmir.

Asılı olmayan sınaqları A hadisəsi baş verənə qədər davam etdirək. Bu sınaqların sayını *X* ilə işarə edək. Aydındır ki, *X 0,1,2,...* qiymətləri alan diskret təsadüfü kəmiyyətdir. X təsadüfü kəmiyyətinin m qiymətini alması hadisəsinin ehtimalını hesablayaq.

*X=m* olması üçün birinci *m–1* sınaqda A hadisəsi baş verməməli, *m–* ci sınaqda isə baş verməlidir. Sınaqlar asılı olmadığına görə axtarılan ehtimal

*P(X=m)=(1-p)m-1⋅p*

olar.

*P(X=m)=(1-p)m-1p* bərabərliyi ilə verilən ehtimallar çoxluğuna p parametrli həndəsi paylanma deyilir.

**1.3.Hiperhəndəsi paylanma**

Qutuda sayda ağ, sayda isə qara har vardır. Bəzi hallarda məmulatın keyfiyyətini yoxladıqda o, sıradan çıxır.Məsələn,məhsulun keyfiyyətinə nəzarəti həyata keçirərkən nəzarət əməliyyatı nəticəsində məhsul satıh üçün yararsız hala dühür.Bu halda məmulatların hamısının deyil, onların müəyyən hissəsinin keyfiyyəti yoxlanılır.Tutaq ki, qutudan təsadüfü qaydada har çıxarılmıhdır. Çıxarılan harlardan sarın ağ har olması hadisəsinin ehtimalını hesablayaq. hardan harı üsulla seçmək olar.Deməli, mümkün halların sayı *–*dir. Çıxarılan harlardan harın ağ har olması hadisəsi() üçün əlverihli halların sayını tapaq. ağ hardan harı üsulla, qara hardan isə *–* harı üsulla seçmək olar.Onda əlverihli halların sayı olar. Beləliklə, klassik ehtimalın tərifinə görə axtarılan ehtimal



olar



işarə edək. bərabərliyi ilə verilən ehtimallar çoxluğuna hiperhəndəsi paylanma deyilir.



**2. Birölçülü kəsilməz paylanmalar.**

**2.1.Müntəzəm paylanma:**  parçasında qiymət alan kəsilməz təsadüfü kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası



şəklində olduqda müntəzəm paylanmaya malik təsadüfü kəmiyyət deyilir.

Müntəzəm paylanmaya malik təsadüfü kəmiyyətin intervalından qiymət alması –dən asılı deyildir və parçanın uzunluğu ilə mütənasibdir:



təsadüfü kəmiyyətinin paylanma funksiyası



şəkilindədir.

**2.2. Normal paylanma:** Normal paylanma terminini ehtimal nәzәriyyәsinә K.Pirson daxil etmihdir. Bu terminlә yanahı, "Haus paylanması", "Haus qanunu" terminləri dә işlәdilir.



bәrabәrliyi ilә verilәn funksiyaya normal sıxlıq deyilir. Uyğun paylanma fun-ksiyasına isә normal paylanma funksiyası deyilir.



olduqda :



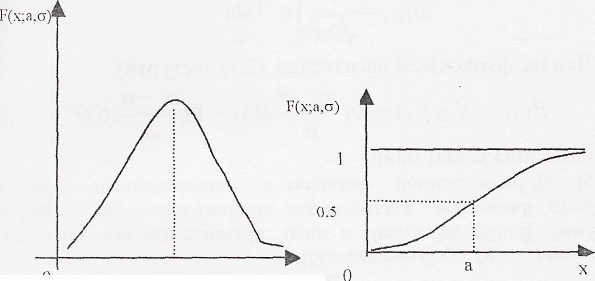
vә



Bu funksiyalara uyğun olaraq standart normal sıxlıq vә standart normal pay-lanma funksiyaları deyilir.

Paylanma funksiyası bәrabәrliyi ilә verilәn tәsadüfi kәmiyyətə parametrli normal kәmiyyәt deyilir və kimi iharә edilir. kәmiyyәtinә standart normal kəmiyyәt deyilir. Normal paylanmanın və onun sıxlıq funksiyasının qrafiki həkil 1*–*dә verilmihdir.





Şәkil 1. Normal paylanma

Normal paylanmanın aşağıdakı xassələri vardır:

1)

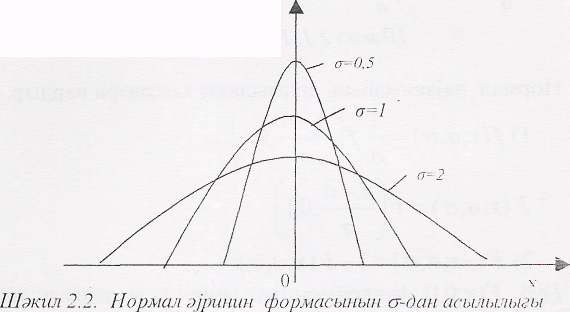


2)



1. Normal əyrinin forması parametrindən asılıdır. Normal əyri -nın azalması ilә ordinat oxuna sıxılaraq, onun boyunca yuxarı dartılır; -nın artması ilə isə absis oxuna sıxılaraq, onun boyunca genәlir.





Şəkil 2. Normal əyrinin formasının α-dan asılılığl

4)



Axırıncı münasibət – dən böyük olduqda təqribən ödənilr. Ona görə də bu funksiyanın qiymətləri cədvəlində arqumentin (0 ,4) intervaldakı qiymətləri verilir.



inteqralı elementar funksiyalar ilə ifadə edilmir. Ona görə də Laplas funksiyasından istifadə edilir.



Bu inteqral yuxarıdan əyrrisi, ahağıdan absis oxu, soldan ordinat oxu, sağdan isə düz xətti ilə hüdudlanmıh fiqurun sahəsinə bərabərdir.



Laplas funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır:

1) - monoton artan funksiyadır.



, istənilən üçün ;



2) - tək funksiyadır , (qrafiki absis oxuya nəzərən simmetrikdir) . Xüsusi halda .



3) .Bu xassə laplas inteqralından alınır. və monoton olduğu üçün təcrübədə kifayət qədər dəqiqliklə , qəbul etmək olar. Bu xassələrə əsasən Laplas funksiyasının –in (0,4) parçasındakı qiymətləri üçün qiymətləri cədvəli ihləyib hazırlanmıhdır



funksiyasını Laplas funksiyası ilə ifadə edək:



olduğunu nəzərə alsaq



olduğunu yaza bilərik.

Tutaq ki, . Onda



düsturunu Laplas funksiyası vasitəsi ilə yazaq:



Xususi halda



**2.3. Üç siqma qanunu.**



Düsturunda qəbul etsək



olduğunu alarıq. Xüsusi halda qəbul edərək, olduğunu nəzərə alsaq



olduğunu yaza bilərik. Bahqa sözlə, hadisəsinin ehtimalı kifayət qədər kiçik ədədinə bərabərdir. Bu isə o deməkdir ki, hadisəsi orta hesabla 10000 haldan 27-də baş verə bilər. Yəni bu hadisə praktiki olaraq mümkün olmayan hadisədir. Üç siqma qanununun mahiyyəti də məhz bundan ibarətdir.



**2.4 Loqarifmik normal paylanma.**

**Pareto paylanması.**

Ehtimal modellərinin qurulmasında normal təsadüfü kəmiyyətlərdən asılı qeyri xətti funksiyaların paylanmasına tez–tez təsadüf edilir.Məsələn, texniki–iqtisadi göstəricilərin modelləhdirilməsində loqarifmik normal paylanmada istifadə edilir.

Tutaq ki, təsadüfi kəmiyyəti müsbətdir. Əgər bu təsadüfi kəmiyyətin loqarifmi – normal paylanarsa, onda ona loqarifmik–normal paylanmıh təsadüfi kəmiyyət deyilir.Tərifdən aydın olur ki, .



təsadüfü kəmiyyətinin sıxlıq funksuyasını tapaq:



Bu paylanmadan gəlirlərin bölühdürülməsi, əmanət qoyuluhlarının, aylıq əmək haqqının və əkin sahələrinin paylanmasının tədqiqində genih surətdə istifadə edilir.

**Pareto paylanması.**

Pareto paylanmasından iqtisadi statistikada genih surətdə ictifadə edilir. Məsələn, vergi orqanları vergi məcəlləsi ilə müəyyən edilmih qaydalara əsasən illik gəlirləri müəyyən sərhəddən –dan çox olan həxslərin gəlirlərinin paylanmasını müəyyən edirlər. Bu və digər bir sıra paylanmalar Pareto paylanma-sı ilə bilavasitə ba]lıdırlar.



Pareto paylanmasının paylayma funksiyası ahağıdakı həkildədir:



Sıxlıq funksiyası isə olduqda , olduqda isə sıfra



**3.Normal paylanma ilə bağlı paylanmalar.**

**3.1. "Xi- kvadrat " paylanma**

Tutaq ki, asılı olmayan standart normal kәmiyyәtlәrdir. Onda



kәmiyyәtinin sıxlıq funksiyası



bәrabәrliyi ilә verilir. funksiyası "xi–kvadrat” sıxlıq, bu sıxlığın tәyin etdiyi paylanma funksiyası isә 'xi–kvadrat ' paylanma adlanır. әdәdinә sәrbәstlik dәrәcәsi deyilir. kәmiyyәtinin sәrbәstlik dәrəcәsi onun ifadәsindәki asılı olmayan dәyihәnlərin sayı ilә müəyyәn edilir.



'xi– kvadrat' paylanması ahağıdakı xassәlәrә malikdir:

1) - nin böyük (n>30) qiymәtlərindә 'xi -kvadrat' paylanma normal paylanmaya yaxınlahır.



2) Tutaq ki, vә sәrbəstlik dәrəcәləri uyğun olaraq n1 və n2 olan 'xi- kvadrat' paylanmaya malik asılı olmayan kəmiyyətlərdir. Onda + kəmiyyəti sәrbәstlik dәrәcəsi n1 + n2 olan 'xi- kvadrat' paylanmaya malikdir.



3)



Tutaq ki, asılı olmayan kәmiyyәtlәrdir və . Onda olar.Beləliklə, təasdüfü kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi olan "xi-kvadrat” paylanmaya malikdir.



"xi-kvadrat” paylanmanın böhran nöqtələri cədvəli işlənib hazırlanmış-dır. Üçüncü xassəyə görə təsadüfü kəmiyyətlər ardıcıllığı asimptotik normal paylanmaya malikdir. Ona görədə cədvəldə böhran nöqtələri sərbəstlik dərəcəsinin qiymətləri üçün verilmihdir. olduqda böhran nöqtəsini tapmaq üçün normal paylanmanın qiymətləri cədvəlindən istifadə etmək olar.



**3.2.Fişer**–**Snedekor paylaması (F- paylanma)**

Tutaq ki, *X1* vә *X2* asılı olmayan vә sәrbәstlik dərəcәləri uyğun olaraq n1,n2 olan 'xi- kvadrat' paylanmasına malikdirlər. Bu halda nisbətinin sıxlıq funksiyası, ancaq *n1* və*n2*әdәdlərindәn asılıdır və



funksiyası Fişer–Snedekor sıxlığı, bu sıxlığın tәyin etdiyi paylanma funksiyası isә Fişer–Snedekor paylanması adlanır.



Aydındır ki, olduqda



təsadüfü kəmiyyəti Fişer–Snedekor paylanmasına malikdir.

"Fiher–Snedekor” paylanmansının böhran nöqtələri cədvəli işlənib hazırlan-mıhdır. *n1* və *n2* –nin böyük qiymətlərində bu paylanmanı normal paylanma ilə əvəz etmək olar.

**3.3. Styudent paylanması (t-paylanma)**

Tutaq ki, XN(0,1) vә U sәrbәstlik dәrәsәsi *n* olan "xi–kvadrat" paylanmasına malik asılı olmayan kəmiyyәtlərdir.



Onda ölçüsüz kəmiyyəti Styudent nisbəti adlanır və bu nisbәtin sıxlıq funksiyası



bәrabәrliyi ilә verilir. funksiyası Styudent sıxlığı, bu sıxlığın təyin etdiyi fun-ksiya isә Styudent paylanması adlanır. *n*–әdədinә isә Styudent paylanmasının sәrbәstlik dәrәcәsi deyilir.



Tutaq ki, asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətlərdir və . Onda təsadüfü kəmiyyətləri də asılı deyillər və .



Normal, “ Xi – kvadrat”, Fişer – Snedekor və Styudent paylanmaları arasında ahağıdakı münasibətlər doğrudur:



Styudent paylanması üçün



münasibәti doğrudur.

Tutaq ki, asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətlərdir və . Aydındır ki, təsadüfü kəmiyyətləri asılı deyillər və .



Onda



Beləliklə, Styudent paylanması parametrindən asılı deyil.



Tutaq ki, asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətlərdir və . Onda təsadüfü kəmiyyətləri də asılı deyillər və . Beləliklə,



təsadüfü kəmiyyəti Styudent paylanmasına malikdir.

Styudent sıxlığı hәrtindә standart normal sıxlığa yığılır, yә'ni



Ona görə böyük *n*- lər üçün P(t<t0) ehtimalını Laplas funksiyası vasitәsilә ifadә etmәk olar.



Styudent paylanmansının böhran nöqtələri cədvəli ihlənib hazırlanmıhdır. Sərbəstlik dərəcəsinin böyük qiymətlərində bu paylanmanı normal paylanma ilə əvəz etmək olar.

Styudent paylanmasından orta qiymətin hipotetik orta ilә müqayisәsi haqqında vә iki orta qiymәtin müqayisәsi haqqında hipotezlərin yoxlanılmasında istifadә edilir.

**4.Styudent, Fiher və “xi-kvadrat” paylanmaya malik**

**bəzi xarakteristikalar.**

**Teorem 1.** Tutaq ki, asılı olmayan parametrli normal təsa-düfü kəmiyyətlərdir. Onda təsadüfü kəmiiyyəti parametrli nor-mal təsadüfü kəmiyyətdir.



**Isbatı:** Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki, asılı olmayan normal təsadüfü kəmiyyətlərin cəmi də normal təsadüfü kəmiyyətdir.

Riyazi gözləmə və dispersiyanın məlum xassələrinə əsasən



və



olduğunu alırıq. Beləliklə kəmiyyəti parametrli normal təsadü-fü kəmiyyətdir.



**Nəticə 1.** normallaşdırılmış təsadüfü kəmiyyəti (0;1) parametrli normal paylanmaya malikdir:



Tutaq ki, asılı olmayan parametrli normal təsadüfü kəmiyyətlərdir və riyazi gözləməsi məlumdur.



təsadüfü kəmiyyətinin paylanmasını tapaq. Bu məqsədlə axırıncı bərabərliyin sağ tərəfini aşağıdakı kimi çevirək:

.



Onda



olar

,



işarə edək.



Deməli, təsadüfü kəmiyyətləri asılı olmayan (0;1) parametrli normal kəmiyyətlərdir və



Beləliklə, - sərbəstlik dərəcəsi olan χ2 paylanmaya malik təsadüfü kəmiyyətdir. Yuxarıda deyilənləri aşağıdakı teorem vasitəsilə ifadə etmək olar.



**Teorem 2.** Tutaq ki, asılı olmayan və parametrli normal təsadüfü kəmiyyətlərdir. Onda



kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi olan χ2 paylanmaya malik təsadüfü kəmiy-yətdir.



**Teorem 3.** Tutaq ki, asılı olmayan və parametrli normal tə-sadüfü kəmiyyətlərdir və , . Onda təsadüfü kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi *n–1* olan Styudent paylanmasına malikdir.



**Isbatı.** Teoremi isbat etmək üçün V-ni iki təsadüfü kəmiyyətin nisbəti şəklində göstərmək lazımdır. Belə ki, kəsrin surətində (0,1) parametrli normal təsadüfi kəmiyyət, məxrəcində isə χ2 paylanmaya malik təsadüfü kəmiyyətin onun sərbəstlik dərəcəsinə nisbətinin kvadrat kökünə nisbəti olmalıdır.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,



bərabərliyi doğrudur.



Deməli, (0;1) parametrli normal paylanmaya malik təsadüfü kəmiyyətdir.Digər tərəfdən – sərbəstlik dərəcəsi *n–1* olan χ2 paylanmaya ma-likdir. Bu isə sübut edir ki, sərbəstlik dərəcəsi *n*–*1* olan Styudent paylanmasına malikdir.



**Teorem 4.** asılı olmayan parametrli normal təsadüfü kəmiyyətlərdir.Onda və təsadüfü kəmiyyətləri asılı deyillər . kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi olan χ2– paylanmaya malikdir.



Nəticə. təsadüfü kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi olan Styu-dent paylanmasına malikdir. Doğrudan da,



, olduğu üçün tərifə görə



sərbəstlik dərəcəsi Styudent paylanmasına malik olar.



**MÖVZU 6 .TƏSADÜFÜ VEKTORLAR (ÇOXÖLÇÜLÜ TƏSADÜFÜ KƏMIYYƏTLƏR)**

**PLAN**

**1. Təsadüfü vektor ( çoxölçülü təsadüfü kəmiyyət) anayışı.**

**2. Təsadüfü vektorun paylanma və sıxlıq funksiyası**

**3. Asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətlər.**

**4. İki ölçülü paylanma funksiyasının xassələri.**

**5. Təsadüfü vektorun yarımzolaqa və düzbucaqlıya düşmə ehtimalları.**

**6. Şərti paylanma funksiyaları və şərti ehtimal sıxlıqları.**

**7. Təsadüfü vektorin komponentlərinin paylanma və sıxlıq finksiyala-**

**rının təyini.**

**8. Şərni riyazi gözləmə.**

**9. Təsadüfü kımiyyətlərin cəminin paylanma funksiyasının tapılması.**

Ə D Ə B İ Y Y T S İ Y A H I S I .

1.Ə. Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, ”Maarif nəşriyyatı”, 1973.

2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çaşıoğlu, 2006.

**MÖVZU 6 .Təsadüfi vektorlar (çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətlər)**

**1.Təsadüfi vektor ( çoxölçülü təsadüfi kəmiyyət) anlayışı.**

Eyni bir elementar hadisələr fəzasında iki və daha çox təsadüfü kəmiyyət təyin edilə bilər.Belə zərurət obyekt bir neçə təsadüfi parametrlər ilə xarakterizə edildikdə yaranır.Məsələn, təsadüfi seçilmiş bir ailənin xərclərin quruluşunun ehtimal (stoxastik) modelləşdirilməsində ərzaqa , ayaqqabıya, paltara , kommunal xərclərə, nəqliyyata, mədəni tələbata və s. xərclər eyni bir elementar hadisələr fəzasında təyin edilmiş təsadüfü kəmiyyətlərdir.

Tutaq ki, eyni bir elementar hadisələr fəzasında təyin edilmiş təsadüfü kəmiyyətlərdir. Bu təsadüfü kəmiyyətlərə *n*–ölçülü vektorunun kordinatları kimi baxmaq olar. Beləliklə, hər bir elementar hadi-səsinə *n* sayda təsadüfü kəmiyyətin nizamlanmış yığımını



(*n* ölçülü təsadüfi vektorunu ) qarşı qoymaq olar.

**Tərif 1.** Kordinatları eyni elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş vektoruna *n*–ölçülü təsadüfi vektor ( *n*– ölçülü təsadüfü kəmiyyət) deyilir.



Bu təsadüfü vektor elementar hadisələr fəzasında təyin olunub və onun qiymətlər oblastı -dir.



**2. Təsadüfü vektorun paylanma və sıxlıq funksiyası**

**Tərif 2.** funksiyasına *n*–ölçülü paylanma fun-ksiyası və yaxud kəmiyyətlərinin birgə paylanma funksiyası deyilir.



Bu funksiya bütün fəzasında təyin olunub. vektoruna fəzasının nöqtəsi kimi baxdıqda, onun n-ölçülü paylanma funksiyası nöqtəsinin n-ölçülü intervalına düşmə ehtimalı olur.



Təsadüfi vektorun paylanma funksiyası onun paylanma qanununu təyin edir.

Təsadüfi vektorun mümkün qiymətlər çoxluğu sonlu və yaxud hesabi çoxluq olduqda ona diskret təsadüfi vektor deyilir.Bu halda



Burada, *n*–ölçülü ədədi vektordur.



Diskret təsadüfü vektor mümkün qiymətlərinin – vektorlarının və ehtimallarının verilməsi ilə birqiymətli təyin edilir.



**Tərif 3.** funksiyası mütləq kəsilməz, yəni



olduqda, vektoruna kəsilməz vektor, – nə isə onun sıxlıq funksiyası və yaxud ehtimalların paylanma sıxlığı deyilir.



Sıxlıq funksiyası paylanma funksiyası ilə yanaşı *n*–ölçülü təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununu təyin edir.

Diskret təsadüfü kəmiyyətlər üçün *n*–ölçülü fəzasının hər hansı altçoxlu-ğu olduqda ehtimalı ehtimallarının cəminə bərabərdir:



Kəsilməz təsadüfü kəmiyyətlər üçün olduqda ehtimalı *n*–ölçülü sıxlıq funksiyasının çoxluğu üzrə *n*–ölçülü inteqralına bərabərdir:



**3.Sıxlıq funksiyasının xassələri.**

1)



2) sıxlıq funksiyasının kəsilməyənlik nöqtələrində



**4.Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər.**

**Tərif 4.** İstənilən üçün hadisələri asılı olmadıqda təsadüfü kəmiyyətlərinə asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətlər deyilir.



Tərifdən bulavasitə aydın olur ki, asılı olmayan təsadüfü kəmiy-yətləri üçün təsadüfü vektorunun paylanma funksiyası təsadüfü kəmiyyətlərinin paylanma funksiyalarının hasilinə bərabərdir:



İki ölçülü təsadüfq vektor üçün



və yaxud



Asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətlərin tərifi axırıncı şərt vasitəsi ilə də verilə bilər. təsadüfü vektoru kəsilməz və təsadüfü kəmiyyətləri asılı olmadıqda



diskret olduqda isə



**Teorem 1.** təsadüfü kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir.



**İsbatı.**

a) Zərurilik. Tutaq ki, asılı deyillər.Onda hadi-sələri də asılı deyil. Beləliklə,



və ya



oduğunu alırıq.

b) Kafilik. Tutaq ki,



Buradan



olduğu alınır. Bu isə tərifə görə kəmiyyətlərinin asılı olmadığını göstərir.



Beləliklə, bu şərtlər asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətlərin tərifi ilə eynigüclüdür.

**Nəticə 1.** Kəsilməz və kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün onların birgə sıxlıq funksiyasının komponentlərin sıxlıq funksiyalarının hasilinə bərabər olması zəruri və kafidir:



Nəticənin doğruluğu münasibətinin hər iki tə-rəfini diferensiallamaq və inteqrallamaqla alınır.



diskret təsadüfü kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün



və yaxud



şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir

İstənilən ədədi çoxluqları üçün



şərtinin ödənilməsi kəsilməz təsadüfü kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün zəruri və kafi şərtdir.



Bundan sonra təsadüfü vektorun digər xassələrini iki ölçülü vektorların misalında öyrənəcəyik.

**5.İki ölçülü paylanma funksiyasının xassələri.**

1. Paylanma funksiyasının qiymətlər oblastı parçasıdır:



Xassənin doğruluğu bilavasitə paylanma funksiyasının tərifindən alınır.Belə ki, ehtimal həmişə mənfi olmayan və vahidi aşmayan ədəddir.

2. paylanma fuknksiyası hər bir arqumentə görə azalmayan funksiyadır, yəni



olduqda ;



olduqda



- funksiyasının arqumentinə görə azalmayan olduğunu göstərək:



Qeyd edilmiş üçün hadisəsini uyuşmayan iki



hadisələrinin cəmi şəklində göstərmək olar.Ehtimalların toplama teoreminə əsasən



Buradan,



Beləliklə, olduqda olar.



Bu xassə paylanma funksiyasının həndəsi mənasından daha aydın olur. Belə ki, , təsadüfü vektorunun təpə nöqtəsi olan kvadrantına düşməsi hadisəsinin ehtimalıdır. –in artması ilə bu kvadrantın sağ sərhədi sağa hərəkət edir.Yəni, olduqda təpə nöqtəsi olan kvadrant təpə nöqtəsi olan kvadranta daxildir. Ona görə də təsadüfü vektorunun təpə nöqtəsi olan kvadranta düşməsi hadisəsinin ehtimalı, onun təpə nöqtəsi olan kvadranta düşməsi hadisəsinin ehtimalından kiçik deyildir.



Eyni qayda ilə funksiyasının ikinci arqumentə görə də azalmayan olduğunu göstərmək olar.



3.Aşağıdakı limit münasibətləri doğrudur:

1)



2)



3)



4)



5)



hadisəsi mümkün olmayan hadisədir.Ona görə də



olduqda təpə nöqtəsi olan kvadrantın sağ sərhəddi sonsuz olaraq sola hərəkət edir və təsadüfü vektorunun bu kvadranta düşməsi hadisəsinin ehtimalı sıfra bərabər olur.



Eyni qayda ilə hadisələri mümkün olmayan hadisələr olduğu üçün



hadisəsi yəqin hadisədir və hadisəsi hadisəsi ilə eynigüclüdür.Ona görə də



Eyni qayda ilə



**6. Təsadüfü vektorun yarımzolaqa və düzbucaqlıya**

**düşmə ehtimalları.**

Təsadüfü vektorun ya-rımzolaqlarına və düzbucaqlısına düşmə ehtimallarını paylanma funksiyası vasitəsi ilə vermək olar:



Beləliklə, təsadüfü vektorunun



yarımzolaqlarına düşmə ehtimalları paylanma funksiyasının uyğun arqumentlərə görə artımına bərabərdir.

düz xətləri ilə hüdudlanmış düzbucaqlıya baxaq. təsadüfü vektorunun bu düzbucaqlıya düşmə ehtimalını hesablayaq. Axtarılan ehtimal təsadüfü vektorun



yarımzolaqlarına düşmə ehtimallarının fərqinə bərabərdir:



**6. Şərti paylanma funksiyaları və şərti ehtimal sıxlıqları.**

Tuaq ki, ikiölçülü diskret təsadüfi vektordur. –mümkün qiymətlərini uyğun olaraq



,



isə ehtimalları ilə alır.



hadisələrinin tam sistem təşkil etdiyini nəzərə alsaq



olduğunu yaza bilərik. Deməli, .



Eyni qayda ilə hadisələri tam sistem təşkil etdiyinə görə olar.



Deməli, . Aydındır ki, .



təsadüfü kəmiyyətinin şərti daxilində şərti paylanması



kimi işarə edilir. Şərti paylanma



kimi təyin edilir.

Qeyd edilmiş üçün ehtimallarının cəmi vahidə bərabərdir. Doğrudan da .



Eyni qayda ilə



Doğrudan da,



İndi isə kəsilməz təsadüfü vektorunun şərti paylanmalarını təyin edək.Tərifə görə təsadüfi kəmiyyətinin ehtimallarının paylanmasının şərti sıxlığı olduqda



kimi, təsadüfi kəmiyyətinin ehtimallarının paylanmasının şərti sıxlığı isəolduqda



düsturu ilə hesablanır.

Ehtimalların paylanmasının şərti sıxlığı sıxlıq funksiyasının bütün xassələrinə malikdir. Xüsusi halda olduğunu göstərək.



Eyni qayda ilə göstərmək olar ki,



Ehtimalların vurulması teoreminə görə



olar.Axırıncı düstura sıxlıq funksiyalarının vurma düsturu deyilir.

və kəmiyyətləri asılı olmadıqda



vektorları üçün



–asılı olmadıqda isə



**7.Təsadüfi vektorin komponentlərinin paylanma və sıxlıq**

**finksiyalarının təyini.**

Tutaq ki, sıxlıq funksiyası olan kəsilməz təsadüfü vektor-dur. və kəmiyyətlərinin sıxlıq funksiyalarını tapaq. təsadüfü kəmiyyəti-nin sıxlıq funksiyası



olar. Axırıncı bərabərlikdə –in hər bir qeyd edilmiş qiyməti üçün mötərizə daxilindəki inteqral müəyyən ədədi qiymət alır. Beləliklə, o –in funksiyasıdır. Bu funksiyanı ilə işarə edək:



Onda



Bu isə paylanma funksiyasının tərifinə əsasən o deməkdir ki, , təsa-düfü kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasıdır. Deməli, birölçülü təsadüfi kəmiyyəti-nin sıxlıq funksiyası ikiölçülü təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiya-sından düsturu vasitəsilə alılnır.



Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası



şəklindədir.

Ümumi şəkildə *n*–ölçülü təsadüfü kəmiyyətinin sıxlıq funksiya-sı məlum olduqda, *m*–ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası



kimi olar.

**8. Şərti riyazi gözləmə.**

Yuxarıda qeyd etdik ki, hər hansı təsadüfi kəmiyyətinin başqa bir təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən şərti paylanma qanununu vermək olar.



Diskret təsadüfi kəmiyyətinin olduqda şərti riyazi gözləməsi dedik-də –in mümkün qiymətlərinin onların uyğun şərti ehtimallara hasillərinin cəmi nəzərdə tutulur:



Eyni qayda ilə təsadüfi kəmiyyətinin olduqda şərti riyazi gözləm-əsi dedikdə –in mümkün qiymətlərinin onların uyğun şərti ehtimallara hasil-lərinin cəmi nəzərdə tutulur.



Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər üçün



Burada –in –ə nəzərən şərti paylanma funksiyasıdır. Şərtsiz və şərti riyazi gözləmələr arasında əlaqə düsturunu vermək olar.



Tutaq ki, hadisələri tam sistem təşkil edir. təsadüfi kəmiyyətinin bu hadisələrə nəzərən şərti paylanma funksiyalarını uyğun olaraq ilə işarə edək. kəmiyyətinin şərtsiz paylanma funksiyasını isə ilə işarə edək.Onda tam ehtimal düsturuna əsasən



Şərti riyazi gözləmənin ifadəsini nəzərə alsaq təsadüfi kəmiyyətinin şərtsiz riyazi gözləməsini belə yazmaq olar:



**9. Təsadüfü kımiyyətlərin cəminin paylanma**

**funksiyasının tapılması.**

Ehtimal modellərinin qurulmasında təsadüfü kəmiyyətlərdən asılı funksiyalara tez–tez təsadüf edilir. Xüsusi halda iki təsadüfü kəmiyyətin paylanma funksiyası-nın tapılması məsələsinə baxaq.

Tutaq ki,:. təsadüfü kəmiyyətinin sıxlıq funksi-yasını tapaq.



Burada inteqrallama çoxluğu uzrə aparılır. –in qeyd edilmiş qiymətində dəyişəni intervalında qiymət alır. Onda



olduğunu yaza bilərik. Daxili inteqralda əvəzləməsi aparsaq



olar. Sıxlıq funksiyasının tərifinə görə



Eyni qayda



olduğunu alarıq.

Indi isə iki asılı olamayan diskret təsadüfü kəmiyyətlərin cəminin ehnimal-larının paylanma qanununu tapaq.Tutaq ki, asılı olmayan diskret təsadüfü kəmiyyətlərdir və . hadisəsini uyuşmayan hadisə-lərinin cəmi şəklində göstərək:



asılı olmayan diskret təsadüfü kəmiyyətlər oldüğü üçün



Onda



Tutaq ki, . Asılı olmayaq təsadüfü kəmiyyətlərin cə-minin sıxlıq funksiyası düsturu ilə hesablanır. bu düsturlan istifadə etməklə olduğunu alarıq. Beləliklə, asılı olma-yan iki normal təsadüfü kəmiyyətin cəmi də normal təsadüfü kəmiyyətdir.



**MÖVZU 7. TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTLƏRİN ƏDƏDİ XARAKTERİSTİKALARI**

**P L A N**

**1. Yerləşmə xarakterisnikaları.**

**1.1 Riyazi gözləmə, moda və median**

**1.2 Riyazi gözləmənin xassələri.**

**2. Səpələnmə xarakterisnikaları.**

**2.1 Orta xətti meyl, dispersiya, orta kvadratik meyl, variasiya əmsalı.**

**2.2 Dispersiyanın xassələri.**

**3. Təsadüfü kəmiyyətlərin momentləri.**

**4. Nəzəri paylanmanın normal paylanmadan kənarlaşmasının qiy-**

**mətləndirilməsi. Asimmetriya və ekses əmsalları**

**5. Kovariasiya və korrelyasiya əmsalı**

**6. Təsadüfü vektorun ədədi xarakteristikaları.**

**MÖVZU 7. TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTLƏRİN ƏDƏDİ XARAKTERİSTİKALARI**

**1.YERLƏŞMƏ XARAKTERİSTİKALARI:**

**(Riyazi gözləmə, moda, median)**

Təsadüfü kəmiyyətlərin ehtimalının paylanma qanunu onun tam xarakteristikası olduğu məlumdur. Lakin bəzən ehtimalın paylanma qanunu məlum olmur, təsadü-fü kəmiyyətin müəyyən ehtimal xassələrini nisbətən az və ya sadə məlumatlar vasitəsilə öyrənmək lazım gəlir. Təsadüfü kəmiyyətin belə sadə xassələri, onun ədədi xarakteristikaları adlanan bir neçə ədədlə ifadə olunur.

Təsadüfü kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları onu müəyyən dəqiqliklə kəmiy-yətcə xarakterizə edir.Bu ədədi xrakteristikalar təsadüfü kəmiyyət haqqındakı bəzi ehtimal məsələlərini çox zaman qısa yolla həll etməyə və həm də həmin kəmiyyət haqqında yığcam və ətraflı məlumat almağa imkan verir.

Təsadüfü kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlərin ədəd oxunda necə paylandığını xarakterizə etmək üçün müxtəlif ədədi xarakteristikalardan (riyazi gözləmə, orta xətti meyl, dispersiya , orta kvadratik meyl, momentlər və s.) istifadə olunur.

**Tərif 1.** Təsadüfü kəmiyyətin yerləşmə xarakteristikası elə sabitə deyilir ki, bu kəmiyyətin bütün mümkün qiymətləri həmin sabit ətrafında qruplaşmış olsun.

Riyazi gözləmə, moda və median ən çox istifadə olunan yerləşmə xarakteris-tikalarıdır.

Tutaq ki, diskret təsadüfü kəmiyyətinin ala bildiyi qiymətləri və uyğun olaraq bu qiymətləri almasının ehtimalları verilmişdir.



**1.1 Riyazi gözləmə, moda və median**

**Tərif 2.** sırası mütləq yığılan olduqda, onun cəminə diskret təsadüfü kəmiyyətinin riyazi gözləməsi deyilir və ilə işarə olunur:



Sıra mütləq dağılan olduqda deyirlər ki, təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi yoxdur.



Təsadüfü kəmiyyəti ancaq sonlu sayda qiymətlərini ala bilirsə, onda onun həmişə sonlu riyazi gözləməsi vardır:



**Tərif 3.** Ehtimalının paylanma sıxlığı olan kəsilməz təsadüfi kəmiyyəti-nin riyazi gözləməsi, mütləq yığılan



inteqralına deyilir. Bu inteqralı mütləq yığılan olmadıqda, deyirlər ki, təsadüfü kəmiyyətin riyazi gözləməsi yoxdur.

Paylanma funksiyası üçün olduğundan riyazi gözləmənin düsturu-nu



şəklində yaza bilərik.

Təriflərdən aydın olur ki, təsadüfü kəmiyyətlərin riyazi gözləməsi sabit ədəddir.

Tutaq ki, kəmiyyəti aparılan n sınaq nəticəsində qiymətini dəfə almışdır və .Ehtimalın statistik tərifinə görə, kifayət qədər böyük n-lər üçün



təqribi bərabərliyini yaza bilərik. Deməli, diskret təsadüfü kəmiyyənin riyazi göz-ləməsi onun ala biləcəyi qiymətlərin hesabi ortasına bərabərdir.

Tutaq ki , təsadüfü kəmiyyət isə onun paylanma funksiyasıdır.



**Tərif 4.** münasibətini ödəyən istənilən ədədikəmiy-yətinin medianı adlanır.



Verilmiş təsadüfü kəmiyyətin riyazi gözləməsi olmaya bilər, lakin hər bir təsadüfü kəmiyyətin heç olmasa bir medianı var.Doğrudan da, paylanma funksiyası 0–dan 1–ə kimi monoton artan olduğundan, elə nöqtəsi vardır ki, funksiya bu nöqtədə 0.5 qiymətindən keçir.funksiyası bu nöqtədə kəsilməz olduqda medianı yeganə olar.Həmin nöqtənin müəyyən ənrafında yerləşən bütün nöqtələrdə bərabərliyi ödənildikdə isə bu ətrafın bütün nöqtələri median olur. Bu intervallar kəmiyyətinin medianlar seqmenti adlanır.



Paylanma funksiyası kəsilməyən olduqda münasibəti



bərabərliyinə çevrilir.Bu halda, təsadüfi kəmiyyətinin medianı, bərabərliyini ödəyən yeganə kökü olar. münasibətini bərabərliyi şəklində yazmaq olar.



Doğrudan da, bu bərabərlik



olmasından



alınır. funksiyası kəsilməyən olduğuna görə bərabərliyi ödənilir. Buna görə də axırımcı bərabərliyi



kimi yazmaq olar. Buradan isə tələb olunan



münasibəti alınır.

bərabərliyindən görünür ki, həndəsi olaraq median, sıxlıq funksiyasının qrafiki ilə əhatə olunmuş sahəni yarıya bölən düz xətt nöqtələrinin absisidir.



Xüsusi halda, simmetrik paylanmaya malik təsadüfü kəmiyyətin medianı onun riyazi gözləməsi ilə üst–üstə düşür.Məsələn, normal qanunla paylanmış təsadüfü kəmiyyətin medianı onun riyazi gözləməsi ilə üst–üstə düşür.

Təsadüfü kəmiyyətin kvantili də mediana analoji olaraq təyin edilir.

**Tərif 5.** tənliyinin kökünə *p*–tərtibli kvantil deyilir.



Xüsusi halda *p=0,5* tərtibli kvantil paylanmanın medianıdır. *p*–nin bir neçə qiymətində kvantilləri bilməklə paylanma funksiyasının artma istiqamətini təyin etmək olar.

təsadüfü kəmiyyətinin paylanmasının p tərtibli böhran nöqtəsi (*p* tərtibli simmetrik böhran nıqtəsi) ( ) tənliyini ödəyən həqiqi ədədinə deyilir.



Eyni bir paylanmanın kvantili və böhran nöqtəsi arasında münasibəti doğrudur.



Standart normal paylanmanın kvantilləri.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | 0,90 | 0,95 | 0,975 | 0,99 | 0,995 | 0,999 | 0,9995 |
|  | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,090 | 3,291 |

Tutaq ki, kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası -dir.



**Tərif 6.** funksiyasının hər bir maksimum nöqtəsinə kəmiyyətinin modası deyilir.



Təsadüfü kəmiyyət yeganə modaya malik olduqda ona bir modalı, bir neçə modaya malik olduqda isə çox modalı adlanır.

Əgər diskret təsadüfü kəmiyyət olub mümkün qiymətlərini ehtimalları ilə alırsa, onda onun modası



münasibəti ilə təyin olunar.

**Medianın xassələri.**

1) Sabit vuruğu median işarəsi xaricinə çıxarmaq olar, yəni



2) Simmetrik təsadüfi kəmiyyətin medianı onun riyazi gözləməsinə bərabərdir.



3)



bərabərsizliyi doğrudur.

Doğrudan da, Çebışev bərabərsizliyinə əsasən



münasibətini, buradan isə xassə 3-ün doğruluğu alınır.

4) mütləq momenti olduqda minimuma çevrilir, yəni



**1.2. Riyazi gözləmənin xassələri.**

1.Sabitin riyazi gözləməsi özünə bərabərdir:



2.Sabit vuruğu riyazi gözləmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:



**İsbatı.** rəsadüfü kəmiyyəti qiymətini ehtimalı ilə alırsa təsadüfi kəmiyyəti qiymətini həmin ehtimalla alır.Onda tərifə əsasən



3.İki təsadüfü kəmiyyətin cəminin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələri cəminə bərabərdir:



**İsbatı.**Tutaq ki, Onda təsadüfi kəmiy-yəti



qiymətlərini ehtimalı ilə alar. Bu halda



və



bərabərlikləri doğru olar. Onda riyazi gözləmənin tərifinə görə



Bu xassə istənilən sonlu sayda təsadüfü kəmiyyətlərin cəmi üçün də doğrudur.



**Nəticə 1.** təsadüfü kəmiyyəti üçün



bərabərliyi doğrudur.

Nəticə 2. İki təsadüfü kəmiyyətin fərqinin riyazi gözləməsi onların riyazi göz-ləmələri fərqinə bərabərdir:

Doğrudan da



4.Asılı olmayan iki təsadüfü kəmiyyətin hasilinin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələri hasilinə bərabərdir:



**İsbatı.** təsadüfü kəmiyyəti qiymətlərini uyğun olaraq



ehtimalları ilə alar.Riyazi gözləmənin tərifinə görə



Bu xassə istənilən sonlu sayda asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətlər üçün də doğrudur:



5.İstənilən təsadüfü kəmiyyəti üçün



bərabərsizliyi doğrudur.



Bu bərabərsizlik



bərabərsizliyindən alınır.

6)



7) olarsa, onda vahid ehtimalla =0 olar.



**2.SƏPƏLƏNMƏ XARAKTERİSTİKALARI**

Təsadüfü kəmiyyətin riyazi gözləməsi, onun qiymətlərinin ədəd oxu üzərində yerləşmə xarakteristikalarından biridir. Qeyd etdiyimiz kimi, təsadüfü kəmiyyətin mümkün qiymətləri onun riyazi gözləməsi ətrafında qruplaşır.Lakin bu qiymətlərin riyazi gözləmə ətrafında necə paylanmasını və ya səpələnməsini çox zaman bilmək tələb olunur.

**Tərif 7.** Təsadüfü kəmiyyətin mümkün qiymətlərinin onun riyazi gözləməsi ətrafında nə dərəcədə sıx səpələnməsinin ölçüsünü göstərən sabit ədədə bu kəmiyyətin səpələnmə xarakteristikası deyilir.

Bu xarakteristikalara orta xətti meyl, dispersiya, orta kvadratik meyl və variasiya əmsalı aiddir.

**2.1.Orta xətti meyl, dispersiya, orta kvadratik meyl , variasiya əmsalı.**

**Tərif 8.** Təsadüfü kəmiyyətinin öz riyazi gözləməsindən meylinin kvadratı-nın riyazi gözləməsinə bu kəmiyyətin dispersiyası deyilir və belə işarə olunur:



Xüsusi halda diskret təsadüfü kəmiyyət olduqda onun dispersiyası



bərabərliyi ilə, kəsilməz olduqda isə



bərabərliyi ilə təyin edilir.

Tərifdən aydındır ki, istənilən təsadüfü kəmiyyətin dispersiyası mənfi olmayan ədəddir.Bunula yanaşı



olduğundan dispersiyanı



düsturu ilə də hesablamaq olar.

bərabərliyindən və dispersiyanın mənfi olmamasına əsasən



olduğunu yaza bilərik.

Təsadüfü kəmiyyətin dispersiyası onun mümkün qiymətlərinin riyazi gözləməsi ətrafında səpələnməsinin sıxlığını göstərməsi aşağıdakı mühakimədən aydındır. təsadüfü kəmiyyətinin qiymətləri riyazi gözləməyə yaxın olduqda cəminin hədləri çox kiçik ədədlər və buna görə də bu cəm də kiçik ədəd olur. Əksinə, təsadüfü kəmiyyətin qiymətləri riyazi gözləmədən uzaqda yerləşdikdə cəmin hədləri böyük ədədlər olur və buna görə də ) cəmi böyük ədəd olur.Buradan aydındır ki, dispersiyanı təsadüfü kəmiyyətin qiymətlərinin riyazi gözləmə ətrafında səpələnməsinin ölçüsü hesab etmək olar.



**2.2.DİSPERSİYANIN XASSƏLƏRİ**

1.Sabitin dispersiyası sıfra bərabərdir:



Doğrudan da ,



2. İstənilən c sabiti üçün



bərabərliyi doğrudur.

Doğrudan da ,



3.Cüt–cüt asılı olmayan kəmiyyətlərinin cəminin dispersiyası , onların dispersiyaları cəminə bərabərdir, yəni



**İsbatı.** qəbul edərək yaza bilərik:



Buradan



**Nəticə3.** İki asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətin cəminin dispersiyası onların dispersiyaları cəminə bərabərdir.

**Nəticə 4.** İki asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətin fərqinin dispersiyası onların dispersiyaları cəminə bərabərdir.

4.



5.



**Qeyd 1.** kəmiyyətinə normallaşmış kəmiyyət deyilir. Onda



olar.

**Tərif 9.** Dispersiyanın hesabi kvadrat kökünə orta kvadratik meyl deyilir.



**Tərif 10.** ədədinə təsadüfi kəmiyyətin variasiya əmsalı deyilir.



Tərifə görə, variasiya əmsalı orta kvadratik meylin riyazi gözləməyə faiz nisbətidir. Başqa sözlə o, –nın –in neçə faizi olduğunu göstərir.



Variasiya əmsalı, müxtəlif ölçü vahidləri ilə ifadə edilən bir neçə kəmiyyətin dəyişmə dərəcələrini müqayisə etməyə imkan verir.

**Qeyd 1.** Standart normal paylanma funksiyasını ilə işarə etsək,



olar.

**Qeyd 2.** normallaşdırılmış təsadüfi kəmiyyətinin intervalına düşməsi ehtimalı



Burada, laplas funksiyasıdır.



**3.TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTİN MOMENTLƏRİ.**

Təsadüfü kəmiyyətin ala bildiyi qiymətləri və bu qiymətləri hansı ehtimalla aldığını göstərən paylanma funksiyası onun ən mükəmməl xarakteritikasıdır. Paylanma funksiyası isə bəzən bir və ya bir neçə parametrdən asılı olur. Məsələn, normal paylanma iki parametrdən asılıdır.Paylanma funksiyasının parametrləri, bir qayda olaraq, təsadüfi kəmiyyətin mühüm ədədi xarakteristikaları olan müxtəlif tərtibli momentlər vasitəsilə ifadə olunur. Təsadüfü kəmiyyətin momentlərini hesablamaqla onun paylanma funksiyasını təyin etmək mümkün olur.

**Tərif 11.**



ədədinə təsadüfi kəmiyyətinin c ədədinə görə *n*-tərtibli momenti deyilir.



Diskret və kəsilməz təsadüfü kəmiyyətlər üçün bu düsturu uyğun olaraq



və



bərabərliklərinə çevrilir.Xüsusi halda olarsa



alarıq.

**Tərif 12.** kəmiyyətikəmiyyətinin *n* tərtibli başlanğıc momenti, isə on-un momenti adlanır.



Təsadüfü kəmiyyətin başlanğıc və mərkəzi momentləri arasında əlaqə vardır:



Doğrudan da, istənilən ədədləri üşün yaza bilərik:



Bu düstur ədədinə görə n tərtibli momenti, ədədinə görə *n*–dən kiçik tərtib-li momentlərlə ifadə etməyə imkan verir.Axırıncı düsturda əvvəlcə sonra isə qəbul etsək, (20) və (21)–i alırıq.



Bü düsturlardan xüsusi hallarda aşağıdakı düsturlar alınır:



Praktikada 3 və 4 tərtibli momentlərdən istifadə edilir.

**4.Nəzəri paylanmanın normal paylanmadan kənarlaşmasının qiymətləndirilməsi. Asimmetriya və ekses əmsalları.**

Normal paylanmalardan fərqli paylanmaların tədqiqində bu fərqin qiymət-ləndirilməsi məsələsi meydana çıxır. Bu məqsədlə asimmetriya və ekses əmsal-larından istifadə olunur. Normal paylanmalar üçün bu əmsallar sıfra bərabərdir. Ona görə də tədqiq edulən paylanma üçün bu əmsallar kiçik olduqda onlun normal paylanmaya yaxın olduğunu fərz etmək olar. Əksinə asimmetriya və ekses əm-sallarının kifayət qədər böyök olması normal paylanmadan əhəmiyyətli kənarlaş-manın olduğunu söyləməyə əsas verir.

Qeyd edək ki, 3 tərtibli mərkəzi moment təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməyə nisbətən paylanmasının simmetrikliyini xarakterizə edir. Bu paylanmalar üçün asimmetriya və ekses əmsalları sıfra bərabərdir. Qeyri simmetrik paylanmalar üçün tək tərtibli mərkəzi momentlər ( bir tərtibli moment istisna olmaqla) sıfırdan fərqlidirlər. Deməli, bu momentlərdən istəniləni asimmetriyanın qiymətləndirilmə-si olaraq götürülə bilər. Lakin onun kəmiyyətinin ölçü vahidi təsadüfi kəmiyyətin ölçü vahidi ilə eynidir. Ona görə də qeyri simmetrikliyin xarakteristikası olaraq ölçüsüz kəmiyyət təyin edilir.



**Tərif 13.** kəmiyyətinə təsadüfü kəmiyyətinin asimmetriya əmsalı deyilir.



Asimmetriya müsbət olduqda paylanma əyrisinin “uzun hissəsi” riyazi gözlə-mədən sağ tərəfdə, mənfi olduqda isə sol tərəfdə yerləşir.

Təsadüfü kəmiyyətin dispersiyası verildikdə onun 4–cü tərtib mərkəzi momenti bu kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən böyük yayılmasını xarakterizə edir. Bu isə simmetrik paylanmanın nöqtəsində maksimum qiymət almasının, yəni pay-lanma əyrisinin bu nöqtədə “şiş” uclu və ya “yastı” olmasının xarakteristikasıdır. Bu vəziyyəti təyin edəcək ölçüsüz kəmiyyət olaraq



təyin olunur.

**Tərif 14.** kəmiyyətinə təsadüfü kəmiyyətinin eksesi deyilir.



Təbiətdə və ya təcrübədə öyrənilən bir çox təsadüfü proseslərin paylanması normal paylanmaya çox yaxın olur. İstənilən təsadüfü kəmiyyətin paylanma əyrisi-ni normal paylanma əyrisi ilə müqayisə edirlər. Ona görə də asimmetriya və eksses anlayışlarının köməyilə hər hansı təsadüfü kəmiyyətin paylanmasının normal paylanmadan meylini xarakterizə edirlər. Bununla əlaqədar ekssesin ifadəsin də 3 toplananı əlavə edilmişdir.Normal paylanma üçün assimmetriya və eksses sıfra bərabərdir.

**5. Kovariasiya və korrelyasiya əmsalı.**

**Tərif 15.** momentinə, yəni



ifadəsinə təsadüfü vektorun kovariasiyası deyilir.

Xüsusi halda



**Tərif 16.** normallaşdırılmış kovariasiyasına təsadüfü vek-torunun və komponentlərinin korrelyasiya əmsalı deyilir.



Aydındır ki,



bərabərliyi ödənilir.

Asılı olmayan kəmiyyətlər üçün . Buradan isə aydındır ki, şərtini ödəyən kəmiyyətlər asılıdır. Onların asılılığını bu kəmiyyətlə xarakterizə etmək əlverişli deyildir, çünki bu kəmiyyət təsadüfü və kəmiy-yətlərinin ölçü vahidlərindən asılıdır. Buna görə də təsadüfü kəmiyyətlərin asılı-lığını kəmiyyətcə xarakterizə etmək üçün həmin kəmiyyətlərin normallaşmış meyllərinin kovariasiyası olan



və ya



kəmiyyəti götürülür. Bu kəmiyyət adsız kəmiyyətdir.

**Tərif 17.** normallaşdırılmış kovariasiyasına təsadüfü vektorunun və komponentlərinin korrelyasiya əmsalı deyilir.



və kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün onların korrelyasiya əmsalının sı-fıra bərabər olması zəruridir, lakin korrelyasiya əmsalının sıfra bərabər olmasından və kəmiyyətlərinin asılı olmaması çıxmır.



Korrelyasiya əmsalı sıfra bərabər olan kəmiyyətlərə korrelyasiyalanmamış, korrelyasiya əmsalı sıfra bərabər olmayan kəmiyyətlərə isə korrelyasiyalanmış kəmiyyətlər deyilir.

Yuxarıda dediklərimiz göstərir ki, asılı olmayan kəmiyyətlər korrelyasiyalan-mamış kəmiyyətlərdir. Lakin korrelyasiyalanmamış kəmiyyətlərin asılı olmadığını hökm etmək olmaz. Deməli, təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmaması, onların kor-relyasiyalanmamış olmasına nəzərən güclü şərtdir.

Normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər üçün isə asılı olmamaq və korrelyasiyalanmamaq anlayışları ekvivalentdir: normal paylanmış və kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün onların korrelyasiya əmsalının sıfra bərabər olması zəruri və kafidir.



**Korrelyasiya əmsalının xassələri :**

1.korrelyasiya əmsalının mütləq qiyməti vahiddən böyük deyildir, yəni istənilən və təsadüfi kəmiyyətləri üçün



bərabərliyi ödənilir.

Doğrudan da,



münasibətinə əsasən



bərabərsizlikləri ödənilməlidir.Buradan



və ya tələb olunan



bərabərsizliyi alınır.Axırıncı bərabərsizliyi



kimi də yazmaq olar.

2.Təsadüfü kəmiyyətlərin xətti çevirməsi, onların korrelyasiya əmsalının mütləq qiymətini dəyişmir, yəni istənilən sabit a, b, c, d ədədləri üçün



bərabərliyi doğrudur.

Doğrudan da, tərifə görə



olduğundan xassənin doğruluğu alınır.

**6. Təsadüfü vektorun ədədi xarakteristikaları.**

**Tərif 18.** ədədi vektoruna ikiölçülü təsadüfi vektorunun riyazi gözləməsi deyilir.



Burada kəsilməz təsadüfi vektorlar üçün

,



diskret təsadüfi vektorlar üçün isə

,



kəsilməz komponentinin dipersiyası düsturu ilə hesablanır.Diskret halda bu düstur şəklinə düşür.



komponentinin dipersiyası müvafiq olaraq



və



düsturları ilə hesablanır.

**Tərif 19.** ifadəsinə kəsilməz təsadüfi vektorla-rın *k+s* tərtibli başlanğıc momenti deyilir.



Diskret təsadüfi vektorlar üçün



**Tərif 20.** ifadəsinə kəsilməz təsadüfü vektorlların *k+s* tərtibli mərkəzi momenti deyilir.



Diskret təsadüfi vektorlar üçün



\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*



Təsadüfi vektorun kovariasiya və korrelyasiya matrisləri.

=



matrisinə *n*–ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin covariasiya matrisi deyilir. Burada, vəkəmiyyətlərinin kovariasiya əm-salıdır.



Kovariasiya matrisi simmetrik həqiqi matrisdir, yəni



=



normallaşdırılmış kovariasya matrisinə isə matrisinə *n*–ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin korrelyasiya matrisi deyilir.



Burada, və kəmiyyətlərinin korrelyasiya əmsalıdır.



1) və matrisləri simmetrik matrislərdir, yəni;;



2) və matrisləri mənfi olmayan müəyyəndirlər, yəni bu matrislərin baş minorları mənfi deyildir:



Qeyd edək ki, bu münasibətlərdə bərabərlik işarəsi o vaxt ola bilər ki, təsadüfi vektorun koordinatları arasında xətti funksional asılılıq olsun.



3) xassə 2–də *n=2* olduqda



4) xassə 3–də götürsək, onda üçüncü xassəni belə yaza bilərik:



5) İstənilən X və Y təsadüfi kəmiyyətləri üçün



bərabərliyi doğrudur.

Təsadüfi vektorun kovariasiya və korrelyasiya matrisləri.

* =



matrisinə *n*–ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin covariasiya matrisideyi-lir. Burada, vəkəmiyyətlərinin kovariasiya əmsalıdır.



Kovariasiya matrisi simmetrik həqiqi matrisdir.

=



matrisinə *n*–ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin korrelyasiya matrisi deyilir. Burada, vəkəmiyyətlərinin korrelyasiya əmsalıdır.



1) və matrisləri simmetrik matrislərdir, yəni;;



2) və matrisləri mənfi olmayan müəyyəndirlər, yəni bu matrislərin baş minorları mənfi deyildir:



Qeyd edək ki, bu münasibətlərdə bərabərlik işarəsi o vaxt ola bilər ki, təsadüfi vektorun koordinatları arasında xətti funksional asılılıq olsun.



3) xassə 2–də *n=2* olduqda



4) xassə 3–də götürsək, onda üçüncü xassəni belə yaza bilərik:



5) İstənilən X və Y təsadüfi kəmiyyətləri üçün



bərabərliyi doğrudur.

Kovariasiya matrisi və ortalar vektoru təsadüfü vektorun əsas xarakteristikalarıdır.



**Teorem.** İstənilən normal vektorunun riyazi gözləməsi və kovariasiya matrisi vardır və onun riyazi gözləməsi dispersiyası isə –ə bərabərdir.



**İsbatı.** Tərifə görə hər bir komponenti normal kəmiyyətdir və buna görə də



Buradan Koşi–Bünyakovski bərabərsizliyinə əsasən yaza bilərik:



kəmiyyətinin riyazi gözləməsini və dispersiyasını tapaq:



**Normal vektorun sıxlıq funksiyası.**

vektorunun sıxlıq funksiyası



şəklində olduqda ona normal təsadüfü vektor deyilir. Burada,

isə



elementinin cəbri tamalayıcısıdır

Beləliklə, çoxölçülü normal paylanma riyazi gözləmələr vektoru və kovariasiya matrisi ilə, yəni baş yığımın sayda parametrləri ilə təyin edilir.



**Misal 1.** *n=1* olduqda birölçülü normal sıxlıq funksiyası alınır:

Döğrudan da, *n=1* olduqda . Onda



Deməli,



**MÖVZU 8. BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU VƏ MƏRKƏZİ LİMİT**

**TEOREMLƏRİ.**

**P L A N**

**1. Təsadüfü kəmiyyətlər ardıcıllığının yığılması.**

**2. Böyük ədədlər qanunu və mərkəzi limi teoremlərinin mahiyyəti.**

**3. Böyük ədədlər qanununun statistuka təcrübəsində əhəmiyyəti. Praktiki**

**yəqinlik prinsipi**

**4. Cebışev bərabərsizliyi**

**5. Böyük ədədlər qanunu haqqında klassik teoremlər.**

**6. Klassik teoremlərin ümumiləşdirilməsi**

**7. Mərkəzi limit teoremləri.**

**MÖVZU 8.BÜYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU VƏ MƏRKƏZİ LİMİT**

**TEOREMLƏRİ.**

**1.Təsadüfü kəmiyyətlər ardıcıllığının yığılması.**

a) **Ehtimala görə yığılma.** təsadüfü kəmiyyətlər ardıcıllığı



şərtini ödədikdə, deyirlər ki, bu ardıcıllıq kəmiyyətinə ehtimala görə yığılır və bu yığılmanı kimi işarə edirlər. Burada, ixtiyari müsbət ədəddir.



**Ehtimala görə yığılmanın mühüm xassələri ilə tanış olaq.**

1) Tutaq ki, olduqda isə kəsilməyən funksiyadır. Onda



2) Tutaq ki, m sayda təsadüfü kəmiyyətlər ardıcıllığı verilmişdir, isə kəsilməyən funksiyadır. Onda



3) və olduqda



**b) vahid ehtimalla yığılma.** Tutaq ki, təsadüfü kəmiyyətlər ardıcıllığı verilmişdir. ə yığılır” hadisəsinə baxaq və bu hadisəni ilə işarə edək..Məlumdur ki, vətəsadüfü kəmiyyətlər olduqda təsadüfü hadisədir. hadisəsi üçün bəra-bərsizliyinin ödənilməsi; - elə vardır ki, üçün bəra-bərsizliyi ödənilir; -hadisəsi isə hər bir üşün elə vardır ki, olduqda bərabərsizliyinin ödənilməsi hadisəsidir.



təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı



bərabərliyini ödədikdə, bu ardıcıllıq kəmiyyətinə vahid ehtimal ilə və yaxud sanki yəqin yığılır deyirlər və bunu kimi işarə edirlər.



olduqda istənilən k üçün , əksinə istənilən k üçün olmasından olduğu alınır.Beləliklə, münasibətinin ödə-nilməsi üçün şərtinin ödənilməsi zəruri və kfidir. monoton artan hadisələr ardıcıllığı olduğu üçün şərtinin ödənilməsi istənilən üçün şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir.Qeyd edək ki, burada nisbətini ixtiyari ilə əvəz etmək olar.



**Teorem 1.** təsadüfü kəmiyyətlər ardıcıllığının kəmiyyətinə vahid ehtimalla yığılması üçün



şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

**Nəticə 1.** təsadüfü kəmiyyətlər ardıcıllığının kəmiyyətinə vahid ehtimalla yığılmasıından ehtimala görə yığılma alınır.



Doğrudan da, olduğu üçün şərtindən alınır.



**Nəticə 2.** təsadüfü kəmiyyətlər ardıcıllığının kəmiyyətinə vahid ehtimalla yığılması üçün ixtiyari müsbət üçün



şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir.



olduğu üçün ixtiyari münasibətinin ödənilməsindən



alınır.

c) orta kvadratik yığılma. İkitərtibli, təsadüfü kəmiyyətləri üçün şərti ödənildikdə bu ardıcıllıq kəmiyyətinə orta kvadratik yığılır deyirlər və bunu kimi işarə edirlər.



ardıcıllığının kəmiyyətinə orta kvadratik mənada yığılması üçün şərtlərinin ödənilməsi zəruri və kafidir.



1) olduqda olar.



2) olduqda



3) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının hər hansı c sabitinə orta kvadratik yığılması üçün şərtlərinin ödənilməsi zəruri və kafidir. Vahid ehtimalla və orta kvadratik yığılmalardan ehtimala görə yığılma alınır.



**2.Böyük ədədlər qanunu və mərkəzi limit teoremlərinin mahiyyəti.**

Ehtimal nəzəriyyəsi və onun tətbiqi sahələrində çoxlu sayda təsadüfü kəmiy-yətlərin cəmi şəklində göstərilən təsadüfi kəmiyyətlərə tez–tez təsadüf edilir. Belə təsadüfü kəmiyyətlərin cəminin paylanma qanununun bilavasitə tapılması müəyyən çətinliklərlə bağlıdır.Məlumdur ki, riyazi gözləmələri , dispersiyaları olan asılı olmayan eyni paylanmaya malik təsadüfü kəmiyyətlərinin hesabi ortası böyük *n*–lər üçün dayanıqlıdır və riyazi gözləmədən az fərqlənır, dispersiya-sı isə şərtində sıfra yaxınlaşır. Deməli, *n*–in böyük qiymətlərində n sayda asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətlərin ədədi ortasının müəyyən mənada –ya bəra-bər olduğunu qəbul etmək olar. Beləliklə, asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətlərin hesabi ortasının böyük *n*–lər üçün dayanıqlıq xassəsinin riyazi ifadəsi böyük ədədlər qanunu vasitəsi ilə verlir.



Böyük ədədlər qanuna aid olan teoremlər təsadüfü kəmiyyətlərin ədədi ortasının hansı şərtlər daxilində dayanıqlı olması şərtlərini müəyyələşdirir. Mərkəzi limit teoremlərində isə n sayda təsadüfü kəmiyyətlərin normallaşdırılmış cəminin şərtində normal paylanmaya malik olması şərtləri ifadə edilir.



Bu mövzuda biz böyük ədədlər qanununun və mərkəzi limit teoremlərinin bəzi teoremləri ilə tanış olacayıq. Bu teoremlərin ehtimal şərhi müşahidələrin sayı kifyəd qədər böyük olduqda onların hesabi ortalar ardıcıllığının xassəsinin öyrənilməsindən ibarətdir. Htsabi ortalar bir sıra maraqlı xassələrə malikdirlər. Hesabi ortanı formalaşdıran hər bir müşahidənin nəticəsi hər hansı bir təsadüfü kəmiyyətin realizasiyası olduğu üçün onun kəmiyyəti haldan (təsadüfdən) asılı olacaqdır. Ancaq müşahidələrin sayı çox olduqda müxtəlif təsadüfü amillərin təsiri qarşılıqlı silinir, nəticədə müşahidənin nəticələrinin hesabi ortası realizasiyası müşahidə edilən təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsindən cüzi fərqlənir.

Böyük ədədlər qanunu təcrübədıə mühüm əhəmiyyətə malikdir. Bu qanun sta-tistik tədqiqatların–uçot və hesabat məlumatlarının toplanmasının, kütləvi hadi-sələrin qanunuuyğunluqlarının aşkar edilməsinin əsasını təşkil edir. Böyük ədədlər qanununa görə müşahidələrin sayının qeyri–məhdud artması ilə müxtəlif təsadüfi meyllər qarşılıqlı silinir və nəticədə müşahidələrin nəticələrinin hesabi ortası, tədqiq edilən əlamətin statistik yığımdakı orta kəmiyyətindən vahidə kifayət qədər yaxın ehtimalla cüzi surətdə fərqlənənir.

Kəmiyyətlərin əsil qiymətini təyin edərkən bu və ya başqa dərəcədə xətaya yol verilir. Məsələn, tərəzi çəkinin, termametr temperaturun, ampermetr cərəyan şiddətinin əsil qiymətini dəqiq deyil, təqribi qiymətini göstərir. Hər hansı a kəmiyyətini təyin edərkən, onun təcrübi qiymətləri vasitəsi ilə təyin edilən



kəmiyyətindən geniş istifadə olunur.Məhz bu kəmiyyət *n*–nin kifayət qədər böyük qiymətlərində *a–*nın əsil qiymətini aşağıda dəqiqləşdiriləcək mənada çox yaxın olur.

Ölçmə prosesində təsadüfü amillər olduğuna görə, onun nəticələrinə təbii olaraq təsadüfü kəmiyyət kimi baxılmalıdır. Ölçmə nəzəriyyəsində aşağıdakı fərziyyə əsas götürülür: aparılan ölçmələrin sayı kifayət qədər böyük olduqda alınan nəticələrin ədədi ortası müəyyən bir *a* sabitinə olduqca yaxın olur. Belə xassəyə malik olan *a* sabitini ölçülən kəmiyyətin əsil qiyməti kimi götürmək təbiidir.



Yuxarıda şərh edilən təcrübi fərziyyə, riyazi cəhətdən ehtimal nəzəriyyəsinin böyük bir bölməsini təşkil edən böyük ədədlər qanunu vasitəsi ilə əsaslandırılır. Ehtimal nəzəriyyəsində böyük ədədlər qanunu dedikdə, təsadüfü kəmiyyətlər ardıcıllığının bu və ya digər mənada müəyyən sabitə yığılması haqqında teoremlər nəzərdə tutulur.Böyük ədədlər qanununun ilk formasını 1713–cü ildə Y. Bernulli kəşf etmişdir. Hadisənin baş vermə tezliyinin onun ehtimalına yığılması haqqında Bernulli teoreminin tarixən fundamental əhəmiyyəti onunla izah olunur ki, bu teorem ehtimalın statistik tərifini riyazi əsaslandırır.Həmin teorem bir çox alimlərin diqqətini cəlb etmiş və müxtəlif istiqamətlərdə gücləndirilmişdir.

Böyük ədədlər qanunu klassik formada belə ifadə olunur.

təsadüfü kəmiyyətlər ardıcıllığı olduqda



şərtini ödəyərsə, həmin ardıcıllıq üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir deyilir.

Bu qanunu ilk dəfə rus riyaziyyatçısı A.Markov ifadə etmişdir.

Burada yığılma ehtimal mənada başa düşülür.Beləliklə, böyük ədədlər qanunu *n* sayda təsadüfü kəmiyyətlərin cəminin öz riyazi gözləməsinə ehtimal mənada yaxınlaşması şərtlərini müəyyən edir.

3. Böyük ədədlər qanununun statistuka təcrübəsində əhəmiyyəti. Praktiki yəqinlik prinsipi.

Bəşəriyyət tərəfindən üzun əsrlər zamanı əldə edilmiş təcrübəyə görə müəyyən şərtlər daxilində hadisənin başvermə ehtimalı kifayət qədər kişik olduqda, bu şərtlərin bir dəfə icrasında hadisəsnin başverməməsinə əmin olmaq olar. İnsan fəaliyyətinin bütün sahələrində bü hadisəni mümkün olmayan hadisə kimi qəbul edirlər. Təcrübədə mümkün olmayan hadisələrin ehtimallarının yuxarı sərhəddini göstərmək mümkün deyildir. Ona görədə hər bir konkret halda praktiki olaraq mümkün olmayan hadisənin başverməsinin əhəmiyyəliliyindən asılı olaraq yuxarı sərhəddi müəyyən etmək lazımdır. Hadisdənin ehtimalı kifayət qədər kiçik olduqda o, praktiki olaraq mümkün olmayan hadisə hesab edilir.Bu halda hadisənin tamamlayanının ehtimalı vahidə yaxın olur. Beləliklə, sınaq nəticəsində hadisəninn tamamlayanı praktiki olaraq yəqin hadisə hesab edilir. Deməli, biz hadsisələrin mümkün olmaması və və onların ehtimalınıln kiçik olması; əksinə onların əksi olan hadisələrin praktiki yəqin olması və yaxud onların ehtimalllarının vahidə yaxın olması haqqında danışa bilərik.

Tutaq ki, hər hansı naməlum parametr qiymətləndirilir. Parametrin qiymət-ləndirməsi böyük ədədlər qanununa tabe olduqda müşahidələrin sayını qeyri-məhdud olaraq artırmaqla vahidə kifayət qədər yaxın ehtimalla xətanın kifayət qədər kiçik olmasını təmin etmək olar. Böyük ədədlər qanunu ayrı–ayrı qiy-mətləndirmələrin xətalarının kifayət qədər kiçik ədədi aşmamasına təminat vermir. Ancaq bu qanuna görə müşahidələrin sayı qeyri–məhdud artdıqda belə hal daha az ehtimallı olur. Məsələn, metal pulu 1000000 dəfə atdıqda hər dəfə qerb üzü düşə bilər. Bu halda qerb üzünün düşməsi hadisəsnin tezliyi *1* olar və rəqəm üzünün düşməsi ehtimalı olan - ½ dən əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənər. Ancaq bu nəticənin ehtimalı olan ədədi o qədər kiçikdir ki, onu praktiki olaraq nəzərə alma-maq olar.Eyni ilə hər hansı iqtisadi rayonda buğdanın məhsuldarlığı qiymət-ləndirildikdə təsadüfən məhsuldarlıqları kiçik ( böyük) olan təsərrüfatlar seçilə bilər və nəticədə məhsuldarlığın qiymətləndirməsi real orta məhsuldalıqdan kifayət qədər fərqli olar. Ancaq böyük ədədlər qanununa görə müşahidələrin sayı qeyri–məhdud olaraq artdıqca belə bir bir nəticənin alınması ehtimalı kiçilir.



Böyük ədədlər qanununun statistika təcrübəsində tətbiqinin əsasını paktiki yəqinlik prinsipi təşkil edir. Bu prinsip empirik müşahidəyə əsaslanır: ehtimalları kifayət qədər kiçik olan hadisələr çox nadir hallarda, ehtimalları vahidə yaxın olan hadislər isə sanki yəqin baş verir. Bu vəziyyət təcrübənin aşkar nəticəsi kimi qəbul edilir. Təsadüfü hadisənin ehtimalı kifayət qədər kiçik olduqda o nadir hallarda baş verir və təcrübədə bu hadisənin baş verməməsini qəbul etmək olar. Bu halda deyirlər ki, hadisəsnin baş verməməsinə əminlik vardır.

Praktiki əminliyə misal olaraq ot tayasında iynənin tapılmasını məsələsini göstərmək olar. Tayadan təsadüfü qaydada çıxarılmış bir çəngə otda axtarılan iynə ola bilər. Ancaq bu hadisənin ehtimalı o qədər kiçikdir ki, praktiki olaraq bu hadisənin başverməsi qeyri–mümkün hesab edilir. Beləliklə, təsadüfü olaraq çıxarılmış bir çəngə otda iynənin olmaması praktiki yəqin hadisədir.

Biz bilirik ki, hər gün nəqliyyat ilə işə kedərkən qəza baş verə bilər və biz həlak ola bilərik. Ancaq praktiki olaraq biz belə bir ehtimalla razılaşmırıq, yəni qəzanın baş verməsi ehtimalı kifayət qədər kiçik olduğu üçün biz qəza nəticəsində həlak olmayacağımıza praktiki olaraq əminik.Eyni ilə seçmə yığıma əsasən iqtisadi rayonda buğdanın məhsuldarlığını qiymətləndirdikdə müşahidələrin sayı kifayət qədər böyük olduqda biz xətanın əhəmiyyətli olmamasına praktiki olaraq əminik.

Praktiki yəqinlik prinsipinə görə çoxsaylı müşahidələr üçün böyük ədədlər qanuna tabe olan xətaların ehtimalı çox kiçikdir. Təcrübə də bu faktın döğruluğunu təsdiq edir. Bununla belə, hadisənin baş verməməsinə praktiki yəqinlik olduğu haldada o, baş verə bilər. Məsələn, yuxarıda qeyd edildiyi kimi təsadüfü qydada çıxarılmış bir çəngə otda iynənin tapılması mümkündür.Buğdanın məhsuldarlığını müəyyən etdikdə təsadüfü qaydada məhsuldarlıqları böyük və yaxud kiçik olan təsərrüfatlar seçilə bilər. Bu halda hətta müşahidələrin sayı çox olduqda belə məhsuldarlığın qiymətləndirməsinin xətası əhəmiyyətli ola bilər. Beləliklə, böyük ədədlər qanununun təcrübədə tətbiqinin əsası olan praktiki yəqinlik prinsipi cox nadir, ancaq mümkün olan istisnalara yol verir. Baş verməməsinə praktiki yəqinlik olan hadisələr baş verə bilər. Ona görə də mümkün istisnaların tezliklərinin daha dəqiq analizi məsələsi meydana çıxır. Bu məsələ gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu vasitəsi ilə həll edilir. Kolmoqorov göstərmişdir ki, asılı olmayan müşa-hidələr bircins yığımda aparıldıqda, yəni müşahidənin nəticələri sonlu riyazi gözləməsi olan hər hansı bir təsadüfü kəmiyyətin qiymətləri olduqda və müşa-hidələrin sayı qeyri–məhdud artdıqda onların nəticələrinin hesabi ortası riyazi gözləməyə vahid ehtimal ilə yığılır:



Bu halda müşahidələrin sayı kifayət qədər böyük olduqda bəra-bərsizliyinin ödənilməsini vahid ehtimalla gözləmək olar. Bu isə o deməkdir ki, riyazi gözləmənin qiymətləndirməsində xəta kifayət qədər kiçik müsbət –dan böyük deyildir.



**4. Cebışev bərabərsizliyi.**

Təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası məlum olduqda onun öz riyazi gözləməsindən kənarlaşmasını dispersiya vasitəsilə qiymətləndirmək olar. Bununla belə kənar-laşmanın ehtimalının qiymətləndirməsi ancaq dispersiyadan asılıdır. Müvafiq qiymətləndirmə Çebışev bərabərsizliyi vasitəsilə həll edilir.

**Teorem 2** (Çebışev bərabərsizliyi ).Sonlu dispersiyası olan *X* təsadüfi kəmiyyə-ti ixtiyari üçün



bərabərsizliyini ödəyir.

Doğrudan da, tutaq ki, X kəsilməz təsadüfü kəmiyyətdir və onun sıxlıq fun-ksiyası dir.Onda



münasibətinə əsasən

və ya



Buradan isə Çebışev bərabərszliyi alınır. Diskret təsadüfi kəmiyyətlər üçün is-bat anolaji üsulla aparılır.

Çebışev bərabərsizliyinin iki nəticəsi ilə tanış olaq. Bu nəticələr böyük ədədlər qanununun və təsadüfi kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən meylinin mütləq qiymətinin müəyyən ədədi aşmaması hadisəsinin qiymətləndirilməsində istifadə edilir.

**Nəticə 1.** İstənilən üçün



bərabərliyində birinci toplanana Çebışev bərabərsizliyini tətbiq etsək



olduğunu alarıq.

**Nəticə 2.** asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduqda



bərabərsizliyi döğrudur.

Bərabərsiszliyi isbat etmək məqsədi ilə təsadüfü kəmiyyətinə baxaq. Riyazi gözləmə və dispersiyanın məlum xassələrinə əsasən



Çebışev bərabərsizliyini təsadüfi kəmiyyətinə tətbiq edək.



Bu bərabərsizlik təsadüfü kəmiyyətlərin hesabi ortasının öz riyazi gözləməsin-dən meylinin mütləq qiymətinin ehtimalının aşağıdan qiymətləndirməsini verir. Bu qiymətləndirmə vahiddən dispersiyaların hesabi ortasının ədədinə hasili qədər kiçikdir. Dispersiyaların hesabi ortası məhdud olduqda qeyd edilmiş üçün bu qiymətləndirmə şərtində vahidə yaxınlaşır.



**5. Böyük ədədlər qanunu haqqında klassik teoremlər.**

Əvvəcə asılı olmayan sınaqa təsadüfi hadisəsinin baş verməsi tezlikləri ardıcıllığı və asılı olmayan yəsadüfi kəmiyyətlərinin



hesabi ortası üçün böyük ədədlər qanununun ödənildiyini göstərək.

**Teorem 3** (Bernulli teorem). Tutaq ki, *n* sayda Bernulli sınağında müsbət nə-ticənin baş vermə sayı , hər bir sınaqda müsbət nəticənin baş vermə ehtimalı isə p–dir. Onda ədədi üçün



münasibəti doğrudur.

**Isbatı.** ilə i–ci sınaqda müsbət nəticənin baş vermə sayını işarə edək. Onda olduğunu yaza bilərik. Aydındır ki, kəmiyyətləri asılı deyillər və



Buradan



Çebışev bərabərsizliyindən istifadə etməklə yaza bilərik:



Bernulli teoremi göstərir ki, aparılan sınaqlatın sayı qeyri–məhdud artdıqda hadisənin başvermə tezliyi ehtimala görə haisənin ehtimalına yığılır.

Bernulli teoremində sınaqların eyni şərtlər kompleksi daxilində aparıldığı fərz olunur. Lakin sınaqları eyni şərtlər daxilində aparmaq həmişə mümkün olmur. Məsələn, naməlum bir kəmiyyəti tapmaq üçün aparılan ölçməıni tamamilə eyni şərtlər daxilində təkrar etmək praktiki olaraq çox çətindir. Buna görə də müxtə-lif şəraitdə aparılan sınaqlar zamanı hadisənin başvermə tezliyinin özünü necə aparmasını bilmək çox mühüm məsələdir.

Müxtəlif şərtlər daxilində aparılan sınaqlar seriyasında hadisənin başvermə tez-liyinin dayanıqlıq xassəsini Puasson öyrənmişdir.

**Teorem 4.** ( Puasson teoremi). Tutaq ki, *n* sayda Bernulli sınağında müsbət nəticənin baş vermə sayı , *i*–ci sınaqda müsbət nəticənin baş vermə ehtimalı isə –dir.Bu halda ehtimal mənada



münasibəti doğrudur.

**İsbatı.** *i*–ci sınaqda müsbət nəticənin baş vermə sayını ilə işarə edək. Onda şərtə görə –lər asılı olmayan kəmiyyətlərdir və



Deməli Çebışev teoreminin şərtləri ödənilir və buna görə də



Teorem5(Çebışev teoremi). Tutaq ki, ,... təsadüfü kəmiyyətlər ardı-cıllığı cüt–cüt asılı olmayandırlar və . Onda ardıcıllı-ğı üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir.



**İsbatı:** Teoremin şərtinə görə

və



Cebışev bərabərsizliyinin nəticəsindən istifadə edərək



olduğunu alırıq. Ehtimal vahiddən böyük olmadığı üçün



Axırıncı bərabərsizlikdə olduqda limitə keçsək teoremin doğruluğunu alarıq.



Bu teoremdəm bilavasitə asılı olmayan eyni paylanmaya malik və sonlu dis-persiyayarı olan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı üçün böyük ədədlər qanununu ödənildiyi alınır.

**Teorem 6.** Tutaq ki, eyni paylanmaya malik asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətlərdir və .Onda ixtiyari üçün



və olduğu üçün Cebışev bərabərsizliyinə əsa-sən yaza bilərik:



Axırıncı bərabərsizlik ardıcıllığı üçün böyük ədədlər qanununun ödə-nildiyini göstərir.



**Qeyd 1.** Məlumdur ki, orta kvadratik yığılmadan ehtimala görə yığılma alınır. ardıcıllığının *a* ədədinə orta kvadratik mənada yığılması üçün şərtlərinin ödənilməsi zəruri və kafidir. kəmiyyətləri asılı olmadıqları üçün . Deməli, teoremin doğrulu-ğu üçün şərtinin ödənilməsi kafi şərtdir. Bu şərt isə olduqda ödənilir. Doğrudan da, Ştols teoreminə görə



**Qeyd 2.**



**Çebışev teoreminin mahiiyyəti və təcrübədə əhəmiyyəti.**

Bu teorem göstərir ki, ayrı–ayrı təsadüfü kəmiyyətlər öz riyazi gözləmərindən kifayət qədər fəqli qiymətlər ala bilərlər. Ancaq çox sayda təsadüfü kəmiyyətlərin hesabi ortası böyük ehtimalla riyazi gızləməyə yaxın olacaqdır. Başqa sözlə, ayrı-ayrı təsadüfü kəmiyyətlərin qiymətlərinin variasiyası kifayət qədər böyük ola bilər, ancaq onların hesabi ortasının səpələnməsi kiçik olacaqdır.

Beləliklə, hər bir təsadüfü kəmiyyətin hansı mümkün qiymətləri ala biləcəyini qətiyyətlə söyləmək mümkün olmasa da, onların hesabi ortasının hansı qiymət alacağının əvvəlcədən görmək olar. Deməli, dispersiyaları müntəzəm məhdud olan çox sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin hesabi ortası öz təsadüfiliyini itirir. Bu onunla izah edilir ki, hər bir kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən kənarlaşması müsbət və mənfi ola bilər. Hesabi ortada isə bu kəkənarlaşmalar bir–birini silir.

Çebışev teoremii təasdüf və zərurət arasındakı əlaqənin parlaq nümunəsidir. Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, adətən, hər hansı fiziki kəmiyətin əsl qiymətini təyin etmək üçün bir neçə ölçmələr aparılır və təcrübi nəticələrin hesabi ortası fiziki kəmiyyətin əsl qiyməti kimi qəbul edilir. Bu ölçmə üsülünün hansı şərtlər daxi-lində doğru olduğuna Çebışev teoremi cavab verir. Döğrudan da, ölçmələrin nəticələrinə təsadüfü kəmiyyətləri kimi baxmaq olar. Bu kəmiyyətlər eyni riyazi gözləməyə malik asılı olmayan və dispersiyaları müntəzəm məhdud olduqda onlara Çebışev teoremini tətbiq etmək olar:



Ölçmələrin nəticələri asılı olmadıqda birinci tələb ödənilir. İkinci tələb ölçmələr sistematik (birişarəli) xətaya malik olmadıqda ödənilir. Bu halda, bütün təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləməsi ölçülən kəmiyyətin əsl qiymətinə bərabərdir. Üçüncü tələb isə cihaz ölçmələrin müəyyən dəqiqliyini təmin etdikdə ödənilir. Ayrı–ayrı ölçmələrin nəticələrinin müxtəlif olmasına bxmayaraq, onların səpə-lənməsi məhduddur.

Yuxarıda göstərilən bütün tələblər ödənildikdə, təcrübənin nəticələrinə Çebışev teoremini tətbiq etmək olar:

Kifayət qədər böyük *n*–lər üçün



bərabərsizliyi vahidə yaxın ehtimalla ödəniləcəkdir. Başqa sözlə, ölçmələrin sayı qeyri–məhdud artdıqda onların hesabi ortasının ölçülən kəmiyyətin əsl qiymətinə kifayət qədər yaxın olmasını yəqinliklə söyləmək olar.

Beləliklə, Çebışev teoremi ölçmənin göstərilən üsulunun hansı şərtlər daxilində tətbiq edilə biləcəyini göstərir. Ancaq, ölçmələrin sayını artırmaqla kifayət qədər böyük dəqiqlik əldə etmək olmaz. Belə ki, cihazın özü ölçülən kəmiyyətin əsl qiymətini müəyyən dəqiqliklə göstərir. Ona görə də hər bir ölçmənin nəticəsi və beləliklə, onların hesabi ortasının dəqiqliyi cihazın dəqiqliyini aşa bilməz.

Böyük ədədlər qanunu müxtəlif sığorta növlərinin –insan həyatının, əmlakın, heyvan və əkin sahələrinin sığortasının əsasını təşkil edir. Əmtəə istehlakının çeşidinin planlaşdırılmasında onlara əhalinin tələbatı nəzərə alınır. Bu tələbatda isə böyük ədədlər qanunu özünü göstərir. Statistikada geniş surətdə tətbiq edilən seç-mə metodu da Çebışev teoreminə əsaslanır.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün böyük ədədlər qanunu A.A.Markov tərəfindən isbat edilmişdır.

**Teorem 7** (A.A. Markov teoremi) Əgər ardıcıllığı



şərtini ödəyirsə onda həmin ardıcıllıq üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir.

**İsbatı.** Doörudanda Çebışev bərabərsizliyinə görə



olduğu üçün buradan alınır.



**6. Klassik teoremlərin ümumiləşdirilməsi.**

Müşahidələrin sayı qeyri–məhdud artdıqda qiymətləndirmənin orta xətasının sıfra yaxınlaşması böyük ədədlər qanununun ödənilməsi üçün kafi şərtdir. Bu şərt isə müşahidələr asılı olmadıqda və onların dispersiyaları sonlu olduqda həmişə ödənilir. Beləliklə, müşahidələrin asılı olmaması və onların dispersiyalarının sonlu olması böyük ədədlər qanununun ödənilməsi üçün kafi şərtdir. Keyfiyyət əlamət-lərinin asılı olmayan müşahidələri aparıldıqda olduğu üçün dispersi-yaların sonlu olması həmişə ödənilir. Kəmiyyət əlamətlərinin müşahidəsində isə bəzi müşahidələrin dispersiyası sonsuz ola bilər. Bu məsələn, təsadüfi kəmiyyətin qiymətlər oblastı sonsuz interval olduqda baş verə bilər. Bu halda böyük ədələr qanununun pdənilməsi üçün digər kafi çərtlər tapılmalıdır.



Markov göstərmişdir ki, böyük ədədlər qanununun ödənilməsi üçün müşahidə-lərin asılı olmaması və müəyyən bir üçün moment-lərinin sonlu olması kifayətdir. Bu isə dispersiyaların sonlu olması şərtinin ümumi-ləşməsidir.



A.Y.Xinçin göstərmişdir ki, müşahidələr asılı olmadıqda və yığım bircins olduqda, yəni müşahidələr eyni bir təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri olduqda hesabi orta üçün böyük ədədlər qanununun ödənilməsi üçün riyazi gözləmənin sonlu olması kifa-yətdir.

Böyük ədədlər qanunu sonlu dispersiyarı olmayan, lakin eyni paylanmaya malik asılı olmayan və sonlu riyazi gözləməyə malik təsadüfi kəmiyyətlər üçün də doğrudur. Bu teoremi ilk dəfə rus riyaziyyatçısı A.Y.Xinçin isbat etmişdir.

**Teorem 8** (A.Y.Xinçin teoremi). Tutaq ki, təsadüfi kəmiyyətləri asılı olmayan eyni paylanma funksiyasına və sonlu riyazi gözləməyə malik kəmiyyətlərdir. Onda bu ardıcıllıq üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir, yəni üçün



.



**Qeyd 3.** Xinçin teoremi təsdiq edir ki, küllü miqdarda təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi ortası vahidə yaxın ehtimal ilə onların riyazi gözləməsinə çox yaxın olur. Başqa sözlə, hər bir kəmiyyət təsadüfi olduğu halda , onların ədədi ortası demək olar ki, sabit qalır. Bu onunla izah edilir ki, hər bir kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən meyli həm müsbət, həm də mənfi ola bilər, lakin onların ədədi ortasında bu meyllər bib–birini qarşılıqlı yox edir. A.Y.Xinçin teoreminin praktiki əhəmiyyətini aşağıdakı misalla izah edək.

Sistematik( birişarəli) xəta buraxmadan və ölçmə şərtlərini sabit saxlamaqla, müəyyən *a* kəmiyyətinin *n* sayda qiymətləri alınmışdır. Ölçmənin xə-taları asılı deyil və ölçmə şərtlərinin sabitliyinə əsasən eyni paylanma funksiyasına malikdir. Bu halda A.Y.Xinçin teoreminə əsasən ədədi ortası *n*–nin kifayət qədər böyük qiymətlərində *a* kəmiyyətinə olduqca yaxın olacaqdır. Buna görə də a kəmiyyətinin təqribi qiyməti olaraq ədədi ortasını qəbul etmək olar:



**7.Mərkəzi limit teoremləri.**

Böyük ədədlər qanunu müəyyən şərtlər daxilində



ədədi ortasının ehtimala görə riyazi gözləməsinə yığıldığını təsdiq edir. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statsistikada bu ədədi ortanın paylanma funksiyasının təyini nəzəri və tətbiqi əhəmiyyət kəsb edən mühüm məsələdir. Praktikada ədədi ortanın paylanma funksiyasını təqribi olaraq normal paylanma funksiyası qəbul edirlər. Bu cür yaxınlaşmanın qanuni olması ehtimal nəzəriyyəsinin mərkəzi limit teoremləri vasitəsi ilə əsaslandırılır.



Qeyd edək ki, hətta eyni bir paylanma funsiyasına malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi ortasının limit paylanması normal paylanma olmayada bilər.

Təbii olaraq belə bir sual ortaya çıxır: kəmiyyətləri hansı şərtləri ödədikdə



(1)



münasibəti doğru olar. Burada cox vaxt qəbul edilir. Ehtimal nəzəriyyəsində bu sual tamamilə öyrənilib və onun cavabı mərkəzi limit teoremi vasitəsilə verilir.



ardıcıllığı üçün (1) münasibəti ödənildikdə deyirlər ki, bu ardıcıllıq üçün mərkəzi limit teoremi ödənilir. Beləliklə, mərkəzi limit teoremləri dedikdə, müəyyən təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının normal təsadüfi kəmiyyətə yığılmasını hökm edən teoremlər nəzərdə tutulur.



Tutaqki, təsadüfi kəmiyyəti üçün elə sabitləri var ki,



münasibəti ödənilir. Bu halda deyirlər ki, kəmiyyəti parametrli asimpto-tik normal paylanmaya malikdir və ya parametrli normal kəmiyyətdir. Bu düstur kəmiyyətinin paylanma funksiyasını *n*–in kifayət qədər böyük qiymətləri üçün parametrli normal paylanma funksiyası ilə yaxınlaşdırmağa imkan verir.



**Teorem 9** (Çebışev). Tutaq ki, asılı olmayan və eyni paylanma fun-ksiyasına malik kəmiyyətlərdir və . Bu halda



münasibəti doğrudur.

**10.Muavr-Laplasın inteqral teoremi.**

Tutaq ki, *n* sayda Bernulli sınağında müsbət nəticənin başvermı sayı, hər sı-naqda müsbət nəticənin başvermə ehtimalı isə p-dir.bu halda,



(2)



**İsbatı.** götürək. Burada, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və



Bu halda olacaqdır. Çebışev teoremini ardıcıllığına tətbiq etsək, (2) münasibətinin doğruluğunu alarıq.



**Teorem 11**(Lyapunov). Tutaq ki, sonlu üçtərtibli mərkəzi moment-ləri olan asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətlərdir. Onda



olduqda istənilən üçün



Burada,



şərtinə Lyapunov şərti deyilir.

**Nəticə 1.** asılı olmayan eyni paylanmaya malik və sonlu üçtərtibli mərkəzi momentləri olan təsadüfü kəmiyyətlər olduqda istənilən üçün



Doğrudan da baxılan halda Lyapunov şərtləri ödənilir:

;



asılı olmayan eyni paylanmaya malik təsadüfü kəmiyyətlər olduqda



Lyapunov teoreminin şərtləri daha zəif şərtlə əvəz edilə bilər. Bu halda üçtərtibli momentlərin varlığı şərtini dispersiyaların sonlu olması şərtləri ilə əvəz etmək olar.

**Teorem 12.** Tutaq ki, asılı olmayan eyni paylanmaya malik və sonlu dispersiyaları olan təsadüfü kəmiyyətlərdir. Onda istənilən üçün



münasibəti döğrudur.



düsturu *n*–in böyük qiymətlərində asılı olmayan eyni paylanmaya malik təsadüfü kəmiyyətlərin cəmi ilə bağlı olan müxtəlif hadisələrin ehtimalını normal yaxınlaşma vasitəsilə hesablamağa imkan verir:



Burada, standart normal təsadüfü kəmiyyətin paylanma funksiyasıdır.



Normal yaxınlaşmadan istifadənin *n*–in hansı qiymətlərində tövsiyə edilməsi məsələsi ehtimalın hesablanmasının tələb edilən dəqiqliyindən asılıdır. Adətən təcrübədə olduqda normal yaxınlaşmadan istifadə edilir.



Təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin paylanma funksiyasının normal paylanmaya yığılması şərtləri təcrübədə adətən ödənilir. Normal paylamaya təcrübədə tez–tez rast gəlinməsi bununla izah edilir. Məsələn, tutaq ki, hər hansı kəmiyyət ölçülür. Ölçmə prosesində paylanma funksiyası məlum olmayan küllü miqdarda nəzərə çarpmayan kiçik təsadüfü xətaların məcmuyu şəklində meydana çıxan xətaya yol verilir. Ölçmə zamanı buraxılan sistematik xətanı aradan qaldırmaq olar, lakin müxtəlif səbəblər üzündən–ölçmə cihazından, mühütin temperaturu və təzyiqindən, təcrübəçinin psixi və fiziki vəziyyətinin dəyişməsi nəticəsində yol verilən xətalanı isə aradan qaldırmaq mümkün deyildir. Bu xətaların hər birininin ümumi xətaya təsiri çox kiçikdir və həmin xətaların məcmuyu ümumi xətanı əmələ gətirir. Mərkəzi limit teoreminə əsasən, küllü miqdarda asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətlərinin cəmində hər bir toplananın ümumi cəmə gös-tərdiyi təsir cüzi olarsa, onda bu cəmi təqribi olaraq normal kəmiyyət qəbul etmək olar. Bunu aparılan müşahidələr də təsdiq edir. Bəzi iqtisadi göstəricilər də küllü miqdarda təsadüfü toplananların cəmindən ibarətdir və hər bir toplananın ümumi cəmə göstərdiyi təsir cüzidir. Bu halda tədqiq edilən göstəricinin normal paylan-maya malik olduğu qəbul edilir.



**Teorem 13**(Borel). Tutaq ki, aparılan n sayda Bernulli sınağında “+” nəticənin başvermə sayı , hər bir sınaqda “+” nəticənin başvermə ehtimalı isə *p*–dir.Onda



ilə *k*–cı sınaqda “+” nəticənin başvermə sayını işarə edək.



.



olduğu üçün teoremin isbatı vahid ehtimalla yığılma kriteriyasından alınır.



**MÖVZU 9. RIYAZI STATISTIKANIN ƏSAS MƏSƏLƏLƏRI. SEÇMƏ METODUNUN ƏSAS ANLAYIŞLARI.**

**P L A N**

**1. Riyazi statistikanın əsas məsələləri.**

**2. Statistik modellər.**

**3. Riyazi statistikanın əsas anlayışları.**

**3.1.Statistik yığımlar.Baş və seçmə yığımlar.**

**3.2.Tezlik anlayışı.Paylanma və variasiaya sırası.Qruplaşdırılımış**

**seçimlər.**

**3.3.Təsadüfü seçim üsulları.**

**4. Paylanma və sıxlıq funksiyalarının qiymətləndirilməsi.**

**4.1. Empirik paylanma funksiyası və onun xassələri**

**4.2. Sıxlıq funksiyasının qiymətləndirilməsi.**

**5. Paylanma əyriləri. Statistik paylanmaların əsas formaları**

Ə D Ə B İ Y Y A T

1.S.Ö.Ömərov, N.Ə.cavadov.Riyazi və tətbiqi statisyika.Bakı, Azərnəşr, 2007.

2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çaşıoğlu, 2006.

**1.Riyazi statistikanın predmeti və əsas məsələləri.**

İstənilən elmin son nəticədə əsas məsələsi real proseslərin tabe olduqları qanu-nauyğunluqların aşkar və tədqiq edilməsindən ibarətdir. Hər bir belə qanunauy-ğunluğu aşkar etmək üçün kifayət qədər sınaqlar (statistika müşahidəsi, ölçmələr, təcrübələrin qoyulması və s.) aparılır. Alınmış məlumatlar sistemləşdirilir, müəy-yən əlamətlərə görə qruplaşdırılır, təhlil edilir və nəticədə öyrənilən hadisələr üçün səciyyəvi olan qanunauyğunluqlar aşkar edilir.

Sınaqların nəticələri və həm də başqa yolla əldə edilmiş statistik məlumatların təhlili üsulları və metodları riyazi statistikanın predmetini təşkil edir.

Riyazi statistika təsadüfü proseslərin qanunauyğunluqlarını öyrə­nən ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanır. Riyazi statistikanın metodları məlumatların statistika müşahidəsi və yaxud sınaqların aparıl­ması nəticəsində əldə edildiyini fərz edir. Bu isə riyazi statistikanın ehtimal nəzə­riyyəsi ilə əlaqəsini şərtləndirir. Əldə edilmiş məlumatlar işlənililir, proses və ha­di­sə­lərin xassələri haqqında müəyyən mənada təsadüfü xarakter daşıyan nəticələrə əsasən mülahizələr söylənilir. Riyazi statisti-kanın əsas məsələsi kütləvi hadisələr və proseslər üzərində aparılmış müşahidə və sınaqların nəticələrinə əsasən onların qanunauyğunluqlarını öyrənməkdən, yəni statistik qərarlar qəbul etməkdən ibarətdir. Statistik qərarlar ayrı–ayrı sınaqlara aid olmayıb, hadisənin ümumi xarakteristikaları haqqında təkliflərdir.

Riyazi statistikanın metodları axtarılan xarakteristikaların qiymətlərini müəyyən etməklə yanaşı onların dəqiqliyini də qiymətləndirməyə imkan verir.

Ümumiyyətlə statistikanın məzmununu aşağıdakı üç bölməyə ayırmaq olar:

1.Statistik müşahidə və yaxud sınaq nəticəsində alınmış statistik məlumatların toplanması və qruplaşdırılması üsullarını müəyyən etmək;

2. Toplanılmış məlumatların statistik tədqiqi. Yəni, müşahidə­nin nəticələri əsasında müəyyən edilmiş qanunauyğunluqların aydın­laşdırılması;

3. Tədqiqatın məqsədindən asılı olaraq statistika müşahidəsi üsullarının və statistik məlumatların təhlili metodlarını işləyib hazırla­maq.

Məhz 3–cü bölmə riyazi statistikanın məzmununu təşkil edir. Bura aşağıdakılar aiddir:

a)hadisənin naməlum başvermə ehtimalının qiymətləndirilməsi; növü məlum olan paylanmanın naməlum parametrlərinin qiymətlən­dirilməsi; təsadüfü kəmiy-yətin bir və ya bir necə təsadüfü kəmiyyətdən asılılığının qiymətləndirilməsi və başqaları;

b)paylanma funksiyasının növü və növü məlum olan paylan­ma funksiyasının parametrləri haqqında hipotezlərin yoxlanılması.

Riyazi statistika tədqiqatın başlanğıcına qədər (sınaqların planlaş­dırılması) və tədqiqat zamanı (ardıcıl təhlil) sınaqların zəruri sayının müəyyən edilməsi üçün üsullar işləyib hazirlamışdır. Müasir riyazi statistika qeyri–müəyyənlik şəraitində qərarların qəbul edilməsində mühüm rol oyna­yan bir elm sahəsidir.

**2. Statistik modellər.**

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, riyazi statistika ehtimal nəzəriyyəsi ilə sıxı surətdə əlaqədə olan tətbiqi riyazi elmdir. O, ehtimal nəzəriyyəsinin anlayışları və metod-larına əsaslanaraq, öz spesifik məsələlərini həll edir. İstənilən riyazi nəzəriyyə on-un öyrəndiyi real prosesləri əks etdirən müəyyən modellər çərçivəsində qurulur. Riyazi model gerçəkliyi riyazi ifadələr vasitəsilə–riyazi dildə təsvir edir. Riyazi statistikanın məsələlərinin spesifikliyini anlamaq və statistik modellərlə tanış olmaq üçün ehtimal nəzəriyyəsindən bəzi məsələlərini xatırlayaq.

Təsadüfü hadisələrin riyazi modelləri ehtimal nəzəriyyəsində öyrənilir. Bu mo-dellər –ehtimal fəzasına əsaslanır. Burada hər bir hadisəsinin *p* ehti-malının məlum olduğu fərz edilir. Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas məsələləri verilmiş model üçün müxtəlif mürəkkəb hadisələrin ehtimallarının tapılması üsullarını işləyib hazırlamaqdan ibarətdir.



Təcrübədə konkret sınaqla bağlı olan hadisənin p ehtimalı çox nadir hallarda tam məlum olur. Əksər hallarda p ehtimalının müəyyən *P* ehtimallar ailəsinin elementi olduğunu əvvəlcədən söyləmək olar. Fərz edək ki, *p* naməlumdur: p=θ∈[0,1] işarə edək. Deməli, müm­kün ehtimallar ailəsi P={Pθ,θ∈[0,1]} şəklindədir və .



P ehtimallar ailəsi verildikdə üçlüyünə statistik model kimi baxılır.



Deyilənləri aşağıdakı misalın üzərində nəzərdən keçirək. Tutaq ki, aparılan *n* Bernulli sınağında müsbət (’’+’’) nəticənin baş vermə ehtimalı *p*, mənfi nəticənin (’’–’’) baş vermə ehtimalı isə *q=1–p*–dir. Sınağın nəticəsini *n* ölçülü – vektoru şəklində göstərmək olar. Müsbət nəticənin başvermə ehtimalı–*p* məlum olduqda bu sınağın ehtimal modeli *(Ω, F, P)* ehtimal fəzası olar. Burada, Ω 2n sayda elementar hadisələrdən ibarət elementar hadi­sələr fəzası, *F* *Ω*–nın müəyyən alt çoxluqlarının –cəbri , *P* isə həmin –cəbrdə təyin edilmiş ehtimaldır. *F*–in hər bir elementinin ehtimalı elementar hadisələrin başvermə ehtimallarına əsasən müəyyən edilir.



Beləliklə, ehtimal modelində bu və ya digər qeyri–müəyyənlik olduqda statistik model tətbiq edilir. Riyazi statistikanın əsas məsələsi sınağın müşahidə edilən nəticələri əsasında əldə edilmiş məlumatlara əsasən qeyri–müəyyənliyi aradan qaldırmaqdan və ya onu kifayət qədər azaltmaqdan ibarətdir. Riyazi statistika statistik qərarlar haq­qında elmdir. Müəyyən mənada o, ehtimal nəzəriyyəsinin tərs məsələlərini həll edir. Belə ki, o, statistik modellərin strukturunu müşahidənin (ölçmələrin) nəticələrinə əsasən aşkar edir, dəqiqləşdirir.

**3.Riyazi statistikanın əsas anlayışları**

**3.1. Statistik yığımlar.Baş və seçmə yığımlar.**

İstənilən fəaliyyət sahəsində sınaqların aparılması statistik yığım adlanan küt-ləvi hadisə və proseslərə xas olan qanunauyğunluqların öyrənilməsi ilə bağlıdır. Belə ki, sınaqların nəticələri ədədi verilənlər yığımı şəklində təsvir edilir.

Sınaqların işlənilməsində yığım anlayışı ilk anlayışdır. Ona görə də əvvəlcə bu anlayışla tanış olaq.

Müəyyən mənada bircins olan hadisələr (obyektlər) çoxluğu yığım adlanır. İstənilən yığım özünə məxsus təbiətə və konkret məzmuna (keyfiyyətə) malikdir. Məsələn, taxıl zəmisindəki sünbüllər çoxluğu maddi obyektlər çoxluğudur. Hər hansı rayonda kəndli (fermer) təsərrüfatları yığımı və sair haqqında danışmaq olar.

Yığımlar öz xassələrinin (əlamətlərinin) ümumiliyinə görə birləşdirilmiş ayrı–ayrı elementlərdən ibarətdir. Yığımın bütün elementlərini baxılan əlamətin artma və ya azalma istiqamətinə görə bir sıraya düzməklə nizamlamaq olar. Bu zaman alınan ardıcıllığa ranjirə edilmiş paylanma sırası və yaxud variasiya sırası deyilir.

Yığımın elementləri sayına onun həcmi deyilir.Yığımın ele­ment­ləri sayı sonlu olduqda ona sonlu yığım, əks halda isə sonsuz yı­ğım deyilir.

Məsələn, Azərbaycan Respublikasında ailə kəndli təsərrü­fat­ları yığımı sonlu yığımdır.

Statistikada sonsuz yığımlarda qanunauyğunluqların öyrənilmə­sinə tez–tez təsadüf edilir. Hətta sonlu yığımlara baxılarkən təcrübədə əksər hallarda tədqiqatçı yığımın bütün elementləri haqqında məlumata malik olmur. Məsələn, müəyyən cinsə malik ətlik mal–qaranın diri çəkisinin onun döşünün dolamasından asılılığını öyrənərkən tədqiqatçının bu məlumatları bütün heyvanlar üzrə əldə etməyə imkan yoxdur. Bu cür hallarda yığımdan məhdud sayda elementlər seçilir və onlar tədqiq edilir. Bununla əlaqədar olaraq baş və seçmə yığım anlayışlarını bir–birindən fərqləndirirlər.

Müəyyən üsulla seçilmiş elementlər yığımına seçmə yığım deyilir. Seçmə yığı-ma sadəcə olaraq seçmə də deyilir.

Müşahidə edilən və ya ölçülən elementlərin (obyektlərin) xarakterik xüsusiy-yətləri və onu digərlərindən fərqləndirən xassəsi əlamət adlanır.

Məsələn, kənd təsərrüfatı müəssisələrinin əlaməti əsas istehsal fondlarının dəyə-ri, ümumi məhsulun həcmi, işçilərin sayı, əkin sahəsi, məhsul vahidinin maya də-yəri və s. ola bilər.

Seçmənin aparıldığı yığıma isə baş yığım deyilir.Yığım müəyyən əlamətə görə bircins qruplara ayrıla bilər. Bircins qruplara statistik yığımlar deyilir.

Beləliklə, bir və ya bir neçə eyni əlamətə malik, lakin digər əlamətlərə görə bir birindən fərqlənən elementlər yığımına statistik yığım deyilir.Yığımı bircins qruplara ayıran əlamətə qruplaşdırma əlaməti deyilir.

Statistik yığıma misal olaraq rayonun 20 təsərrüfatının dənli bit­ki­lərin məhsuldarlığına görə paylanmasını göstərmək olar (cədvəl 1.1.).

**Cədvəl 1.**

**Təsərrüfatların dənli bitkilərinin məhsuldarlığına**

**görə paylanması**

|  |  |
| --- | --- |
| Dənli bitkilərin məhsuldarlığı, s/ha | Təsərrüfatların sayı |
| 16-ya qədər  16-18  18-20  20-22  22-dən yuxarı | 2  5  4  6  3 |

Əlamətlər keyfiyyət və kəmiyyət əlamətlərinə bölünür. Ayrı–ayrı qiymətləri mühüm xüsusiyyətlərinə, xassələrinə görə bir–birindən fərqlənən əlamətlər keyfiy-yət əlamətləri adlanır. Keyfiyyət əlamətinə misal olaraq insanın cinsini–kişi, qadın; təhsil pillələri–bakalavr, magistr, doktorantura; məhsulun keyfiyyətini–keyfiyyət-siz, keyfiyyətli və s. göstərmək olar.

Keyfiyyət əlamətlərinə atributiv əlamətlər də deyilir. Atributiv əlamət bir–biri-nin əksi olan iki mümkün qiymətdən ancaq birini ala bilirsə ona alternativ əlamət deyilir (savadlı, savadsız).

Ayrı–ayrı qiymətləri kəmiyyətcə bir–birindən fərqlənən əlamətlərə kəmiyyət əlamətləri deyilir. İşçilərin əmək haqqı, yaşı, məhsul istehsalının həcmi və s. kə-miyyət əlamətləridir.

Kəmiyyət əlamətləri dəyişmə xarakterinə uyğun olaraq kəsilməz və diskret ola bilər. Kəmiyyət əlaməti müəyyən intervalda bütün qiy­mət­ləri alırsa ona kəsilməz əlamət, əks halda isə diskret əlamət adlanır.

Statistik yığım eyni zamanda bir və ya bir neçə əlamətə görə bircins qruplara ayrıla bilər. Bununla əlaqədar olaraq bir, iki və çoxölçülü statistik yığımları fərq-ləndirirlər. İkiölçülü statistik yığıma misal olaraq cədvəl 1.2.–də verilmiş paylan-manı göstərmək olar.

**Cədvəl 2**

**Təsərrüfatların dənli bitkilərin məhsuldarlığı və məhsul vahidinin maya dəyəri səviyyəsinə görə paylanması**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Kartofun məhsuldarlığı,  s/ha | Bir sentnerin maya dəyəri, man | | | | | |
| ≤23 | 23-24 | 24-25 | 25-26 | ≥26 | Yekun |
| ≤16 | - | - | 2 | 4 | 7 | 13 |
| 16-18 | - | - | 1 | 3 | 2 | 6 |
| 18-20 | - | - | 6 | 2 | 1 | 9 |
| 20-22 | - | 1 | 3 | 1 | 1 | 6 |
| 22-24 | 2 | 3 | - | 4 | 5 | 14 |
| ≥24 | 3 | 1 | 2 | - | 6 | 12 |
| Yekun | 5 | 5 | 14 | 14 | 22 | 60 |

Təcrübədə təsadüf edilən statistik məlumatlar yığımları içərisində elə siniflər vardır ki, onların nəzəri işlənilməsi xüsusi metodlar vasitəsilə mümkündür. Bu siniflərdən bəziləri ilə tanış olaq.

təsadüfiü kəmiyyəti ilə bağlı olan sınağa baxaq. Müşahidə edilir. Sınağı apa-rılma şərtləri dəyişmədən *n* dəfə təkrar edərək təsadüfü kəmiyyətinin müşahidə edilmiş qiymətlərini alarıq. Aydındır ki, asılı olmayan təsadüfü kəmiyyətlərdir və onların hər biri təsadüfü kəmiyyəti ilə eyni paylan-ma funksiyasına malikdir.



Sınağın nəticələri statistik məlumatların mühüm bir sinfidir. Bu sinfə daxil olan statistik məlumatların öyrənilməsində xüsusi terminologiyadan istifadə edilir.



Belə bir sınağa baxaq: Tutaq ki, hər hansı bir sonlu *A* çoxluğu verilmişdir. Çoxluqdan təsadüfü olaraq bir element seçilr, onun müəyyən xarakteristikası qeyd edilir və yenidən çoxluğa qaytarılır. Hər bir elementin seçilmə ehtimalının eyni olduğu fərz edilir. Bu halda verilmiş *A* çoxluğu baş yığım və ondan təsadüfü şəkildə seşilən kiçik həcmli elementlər yığımı isə seçmə yığım və yaxud sadəcə olaraq həcmi *n* olan təsadüfü seçim, təsvir edilən proses isə təsadüfü seçim adlanır.



Əksər hallarda tədqiqatçını elementlərin özü deyil, onların müəyyən xarakteristi-kaları və yığımda paylanması maraqlandırır. Bu cür hallarda baş yığıma elementlər çoxluğu kimi deyil, təsadüfü kəmiyyətinin qiymətlər çoxluğu kimi baxmaq məqsədəuyğundur. Bu halda müşahidə eilmiş qiymətlərinə təsa-düfü kəmiyyətinin qiymətlər çoxluğundan ayrılmış həcmi *n* olan seçim kimi baxılır. Başqa sözlə təsadüfü seçim təsadüfü kəmiyyət üzərində ardıcıl aparılmış *n* asılı olmayan müşahidənin nəticəsidir.



Yuxarıda qeyd edildiyi kimi riyazi statistika ehtimal nənəzəriyyəsinə əsaslanır və onın əsas məsələsi seçmə məlumatlara əsasən baş yığımın xarakteristikalarını qiymətləndirməkdən ibarətdir.

Təcrübədə *A* sınağının *n* dəfə təkrarı zamanı alınan ədədlərinə kompo-nentləri asılı olmayan və baş yığımı ilə eyni paylanma funksiyasına malik təsadüfü vektorunun çoxsaylı realizasiyalarından biri kimi baxılma-lıdır. Ona görə də seçimi xarakterizə edən təsadüfü vektorunun pay-lanma funksiyası



şəklindədir.



**3.2.Tezlik anlayışı. Paylanma və variasiaya sırası.**

**Qruplaşdırılımış seçimlər.**

**Tərif 1.** olduqda seçmin elementlərinin ardı-cıllığı şəklində yazılışına onun variasiya sırası, x(n) – x(1) fərqinə isə seçimin genişliyi deyilir.



Tutaq ki, *x1, x2, ..., xn* seçməsində *k (k< n)* sayda müxtəlif *z1, z2, ...., zk* elementləri vardır. *ni* ilə *zi* elementinin təkrarlanma sayını işarə edək. Elementin təkrarlanma sayına onun tezliyi deyilir.

Aydındır ki,

.



**Tərif 2.** (zi, ni), cütləri ardıcıllığına seçmənin statistik və yaxud pay-lanma sırası deyilir.



Adətən, statistik sıra iki sətrdən ibarət bir cədvəl şəklində verilir. Belə ki, cəd-vəlin birinci sətrində *zi* elementləri, ikinci sətrində isə uyğun *ni* tezlikləri yazılır:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| zi | z1 | z2 | ... | zk |
| ni | n1 | n2 | ... | nk |

Seçimin həcmi böyük olduqda onun elementlərini müəyyən qrup­larda birləş-dirərək, seçməni qruplaşdırılmış statistik sıra şəklində göstərirlər. Bundan ötrü seç-mənin bütün elementlərini öz daxilində saxlayan intervalı kəsişməyən intervallara ayırıırlar. Qruplaşdırma intervalları (xüsusi intervallar) təyin edildikdən sonra hər intervala düşən elementlərin sayını (intervalın tezliyini) tapırlar. Xüsusi intervalın sağ uc nöqtəsi ilə üst–üstə düşən elementi növbəti xüsusi intervala aid edirlər. Statistik sıranın birinci sətrində xüsusi itervalların orta nöqtələri, ikinci sətrində isə həmin intervalların tezlikləri yazılır.

Qeyd edək ki, xüsusi intervallar eyni uzunluğa malik olduqda hesablama nəzərə çarpacaq dərəcədə sadələşir (*k*–intervalların sayıdır). Bərabər intervallı sıralarda intervalların sayını ingilis statistiki Sterdjesin təklif etdiyi *k= 1+ [3,322 lgn]* düstu-ru ilə təyin etmək olar. Burada *n* seçmənin həcmidir. Onda intervalın uzunluğu kimi təyin edilir və aşağıdakı xüsusi intervalları alırıq: *[x(1), x(1)+ b), [x(1)+ b, x(1)+ 2 b), ....., [x(1)+ (k- l) b, x(1)+ kb).*



Qeyd etmək lazımdır ki, seçimin qruplaşdırılması sonrakı hesablamalara xəta verir və bu xəta qruplaşdırma intervallarının sayı azaldıqca artır.

Riyazi statistikada tezliklə bərabər nisbi tezlik, yığılmış tezliklər , yığılmış nisbi tezliklər anlayışlarından da istifadə edilir. Aydındır ki,



.



**3.3.Təsadüfü seçim üsulları**

Öyrənilən hadisələrin mahiyyətindən, yığımın həcmindən, müşa­idə edilən əla-mətlərin variasiyasından və paylanmasından asılı olaraq müxtəlif seçmə üsul-larından istifadə edilir. Seçim üsulu vahidlərin baş yığımdan seçilməsinin konkret mexanizmini və ya prosedurasını müəyyən edir. Təsadüfü seçim tədqiqatlar təcrü-bəsində ən geniş yayılmış seçim üsulları aşağıdakılardır:

1) təsadüfü;

2) mexaniki;

3) tipik;

4) seriyalı;

5) kombinə edilmiş.

Təsadüfü seçim baş yığımdan vahidlərin təsadüfü olaraq seçilmə­sini nəzərdə tutur. Təsadüfü seçimi apararkən hər şeydən əvvəl baş yığımın vahidlərinin seçimə düşməsi imkanlarının (şanslarının) bərabər olduğuna əmin olmaq lazımdır. Həm-çinin baş yığımın sərhədlərini elə dəqiqləşdirmək lazımdır ki, ayrı–ayrı vahidlərin ona daxil edilməsi və ya edilməməsi şübhə doğurmasın. Məsələn, tələbələrin təd-qiq edilməsi zamanı akademik məzuniyyətdə olan şəxslərin, qeyri–dövlət ali məktəb tələbələrinin nəzərə alınıb–alınmamasını göstərmək lazımdır.

Təsadüfü seçmə texniki olaraq püşkatma metodu və ya təsadüfü ədədlər cədvəli əsasında həyata keçirilir.

Püşkatma üçün baş yığımın həcminə uyğun gələn sayda püşklər–fişkalar, şarlar və ya kartoçkalar hazırlanmalıdır. Hər bir püşk yığımın ayrıca vahidi haqqında in-formasiyaya (şəxsin sıra sayı, soyadı və ya ünvanı; hər hansı fərqləndirici əlamət) malik olmalıdır. Seçmənin müəyyən edilmiş faizinə müvafiq olaraq baş yığımdan zəruri sayda püşk təsadüfü qaydada götürülür.

Təsadüfü ədədlər cədvəlinə görə baş yığımın hər bir vahidi sıra nömrəsinə malik olmalıdır. Təsadüfi ədədlər cədvəli xüsusi proqramın köməyi ilə EHM–dan alınır və ixtiyari ədədlər sütunu kimi ifadə olunur. Seçmə yığıma sıra nömrəsi seçilmiş sütundakı ədədlərə uyğun gələn vahidlər daxil edilir.

Təsadüfü seçim təkrar və təkrar olmayan ola bilər. Təkrar olmayan seçim zama-nı püşkatma prosesində düşən püşklər geriyə, ilkin yığıma qaytarılmır və sonrakı seçmədə iştirak etmirlər. Təsadüfü ədədlər cədvəlindən istifadə etdikdə seçimin təkrar olmamasına seçmədə iştirak etmiş ədədlərin buraxılması yolu ilə nail olunur.

Tipik seçim o halda tətbiq olunur ki, baş yığımın bütün vahidlərini bir neçə tipik qruplara bölmək mümkün olur. Məsələn, əhalinin tədqiq olunması zamanı belə qruplar rayonlar, sosial, yaş və ya təhsil qrupları ola bilər. Tipik seçim hər bir tipik qrupdan vahidlərin təsadüfü və ya mexaniki üsulla seçilməsini nəzərdə tutur.

Tipik seçimdə vahidlərin seçilməsi ya tipik qrupların həcminə, ya da əlamətin qrupdaxili diferensasiyasına mütənasib olaraq təşkil oluna bilər. Lakin təcrübədə onun tətbiqi seçmə müşahidəsinə qədər variasiya haqqında məlumatların alınma-sının çətinliyi ucbatından həmişə mümkün olmur.

Baş yığım hər hansı qaydada nizamlanmış olduqda, yəni vahidlər müəyyən ardıcıllıqla yerləşdikdə (işçilərin tabel nömrəsi, seçicilərin siyahısı, respondentlərin telefon nömrələri, evlərin telefon nömrələri, binaların və mənzillərin nömrələri və s.) mexaniki seçmə tətbiq edilir.

Mexaniki seçimi aparmaq üçün seçimin həcminin baş yığımın həcminə nisbəti ilə müəyyən olunan seçmə proporsiyası müəyyənləşdirilir. Məsələn, əgər 100000 vahiddən ibarət olan yığımdan 2%–li seçmə almaq nəzərdə tutulursa, yəni 2000 vahid götürülməlidirsə, onda seçmə proporsiyası olar. Vahid-lərin seçil­məsi müəyyən olunmuş proporsiyaya müvafiq olaraq bərabər fasilələr (inter­vallar) üzrə həyata keçirilir. Məsələn, 1:50 proporsiyasında (2 %–li seçmə) hər bir 50–ci vahid, 1:25 proporsiyasında isə (4 %–li seçmə) –hər bir 25–ci vahid götürülür.



Mexaniki seçimdə baş yığımı öyrənilən əlamətin kəmiyyətinə görə nizamlamaq və ya ranjirə etmək olar ki, bu da seçmənin rep­rezentativliyini yüksəltməyə imkan verir. Lakin bu halda öyrənilən əlamətin qiymətinin azalması (əgər hər bir inter-valda başlanğıc qiymət qeyd olunarsa ) və ya onun artması ilə (əgər hər bir inter-valda sonuncu qiymət qeyd olunursa) bağlı olaraq sistematik xəta təhlükəsi artır. Ona görə də seçimi birinci intervalın ortasından başlamaq məqsədə uyğundur. Məsələn, 5 %–li seçimdə 10, 30, 50 və bu ardıcıllıqla sonrakı vahidlər götürülmə-lidir.

Yığımın vahidləri böyük olmayan qruplarda və ya seriyalarda birləşmiş olduqda seriyalı seçim üsulunun tətbiqi əlverişli olur. Belə seriyalar kimi əmtəə partiyası, tələbə qrupları, briqadalar və başqa birləşmələr götürülə bilər. Seriyalı seçimnin mahiyyəti təsadüfi və ya mexaniki üsulla seriyaların seçilməsindən və onlar daxilində vahidlərin ucdantutma tədqiqinin həyata keçirilməsindən ibarətdir.

Statistik tədqiqat təcrübəsində yuxarıda qeyd olunan üsullardan başqa onların kombinasiyası da tətbiq edilir. Məsələn, seriyalar müəyyən olunmuş qaydada bir neçə tipik qrupdan götürülürsə, onda tipik və seriyalı seçimləri kombinə etmək (birləşdirmək) olar. Ayrı–ayrı vahidlər seriyalar daxilindən təsadüfü qaydada götürüldükdə isə təsadüfü və seriyalı seçimlərin kombinasiyası mümkündür. Belə seçimin xətası seçimin pilləliyi ilə müəyyən olunur.

Baş yığımdan əvvəlcə iri qruplar, sonra bir qədər kiçik qruplar götürülməklə bu qaydada davam edərək tədqiq edilən vahidlər seçilirsə, bu cür seçim çoxpilləli adlanır.

Çoxpilləli seçimdən fərqli olaraq çoxfazalı seçim onun aparılmasının bütün mərhələlərində eyni vahidlərin saxlanmasını nəzərdə tutur. Bu halda hər bir mər-hələdə seçilmiş vahid tədqiqata cəlb olunur (seçimin hər bir sonrakı mərhələsində tədqiqatın proqramı genişlənir).

**4. Paylanma və sıxlıq funksiyalarının qiymətləndirilməsi.**

**4.1. Empirik paylanma funksiyası və onun xassələri**

Tutaq ki, paylanma funksiyası olan baş yığımdan seçimdir. kəsilməz funksiya olduqda onun qiymətləndirməsini quraq.



**Tərif 3.** qiymətlərini uyğun olaraq ehtimalları ilə alan diskret təsa-düfü kəmiyyətin paylanma funksiyasına seçimin empirik paylanma funksiyası deyilir və ilə işarə edilir.



funksiyası yığılmış tezliklər vasitəsilə aşağıdakı kimi təyin



Burada cəmləmə seçmənin z1 < x şərtini ödəyən elementlərinin tezlikləri üzrə aparılır.

Empirik paylanma funksiyasını aşağıdakı şəkildə də yazmaq olar:



funksiyası aşağıdakı xassələrə malikdir:



1.



2. (x(1), x(n)] intervalında azalmayan hissə–hissə sabit funksiyadır.



3. soldan kəsilməyən funksiyadır. nöqtələri funksiya-nın kəsilmə nöqtələridir, bu qğqtələrdə funksiyanın sıçrayışı –ə bərabərdir. nöqtələri içərisində k sayda bərabər olan nöqtələr olduqda isə funksiyanın sıçrayışı -ə bərabərdir.



Empirik paylanma funksiyası riyazi statistikada fundamental rol oynayır. O, təsadüfü seçimi (statistik məlumatları) kifayət qədər yaxşı təsvir edir. ınaqların (müşahidələrin) sayı qeyri-məhdud olarq artdıqca empirik paylanma funksiyası baş yığımın nəzəri paylanma funksiyasına yaxınlaşır.

**Teorem 1.** İxtiyari qeyd edilmiş *–∞ <x <+∞* üçün empirik paylanma funksiyası baş yığımın nəzəri paylanma funksiyasına ehtimala görə yığılır. Yəni, ixtiyari *ε>0* və ixtiyari *–∞ <x< +∞* üçün



**İsbatı.** Istənilən *x*–dən kiçik olan –lərin sayını ilə işarə edək. Aydındır ki, . Tərifə əsasən, empirik paylanma funksiyası qiy-mətlərini alan təsadüfü kəmiyyətdir və



–in tərifinə görə o, *(n, p)*parametrli binomial paylanmaya malikdir. Burada . Ona görə də



olduğunu yaza bilərik. Deməli, – ’’+’’ nəticəsinin başvermə ehtimalı olan *n* Bernulli sınağında hadisəsinin nisbi tezliyidir. Böyük ədədlər qanu-nunun Bernulli teoreminə görə *n* Bernulli sınağında müşahidə edilən istənilən ha-disənin nisbi tezliyi *n→∞* olduqda bu hadisənin ehtimalına ehtimala görə yığılır. Ona görə də bu teoremə əsasən ) empirik paylanma funksiyasının nəzəri paylanmia funksiyasına ehtimala görə yığıldığını deyə bilərik.



Beləliklə, seçimin həcmi kifayət qədər böyük olduqda hər bir *x* nöqtəsində empirik paylanma funksiyasının qiyməti həmin nöqtədə nəzəri paylanma funksi-yasının təqribi qiyməti olaraq götürülə bilər. Bu mənada empirik paylanma funksi-yası nəzəri paylanma funksiyasının statistik analoqu olaraq qəbul edilir

Empirik paylanma funksiyasının nəzəri paylanma funksiyasından meylini qiy-mətləndirmək üçün variasiya sırasının nöqtələrində –in -dən ən böyük meylini ölçü olaraq götürürlər. funksiyası kəsilməyən olduğu üçün meyllərini hesablamaq olar. Bu meyllərdən mütləq qiymətcə ən böyüyünü ilə işarə edək. sayda kəmiyyətlərindən ən böyüyünü isə ilə işarə edək:



**Teorem 3** (Kolmoqorov). paylanma funksiyası kəsilməz olduqda



Burada,



Kolmoqorov teoreninə görə . Burada tənliyini -yə görə köküdür, yəni əhəmiyyətlilik səviyyəsinə uyğun böhran nöqtəsidir.



**Cədvəl 3.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| etibarlılıq səviyyəsi | əhəmiyyətlilik səviyyəsi | Böhran sərhədləri |
| 0. 9 | 0.1 | 1.224 |
| 0.95 | 0.05 | 1.358 |
| 0.99 | 0.01 | 1.628 |

bərabərsizliyini 95%–li etibarlılq səviyyəsi üçün şəklində yazmaq olar.Sınaqların sayı kifayət qədər çox olduqda olduğunu qəbul etmək olar. Beləliklə, Kolmo-qorov teoreminə əsaslanan uzlaşma kriterisi aşağıdakı kimi ifadə edilə bilər:



Tutaq ki, fərqinin tapılmış maksimal qiymətidir və .



fərqi kiçik olduqda, az ehtimallı hadisə başvermişdir, -in –dən kənarlaşması əhəmiyyətlidir və təsadüfü seçim mexanizmi ilə izah edilə bilməz. fərqi böyük olduqda isə –in –kənarlaşması əhə-miyyətli deyildir və nəticənin sınaq ilə uzlaşdığını qəbul edirik.



**4.2. Sıxlıq funksiyasının qiymətləndirilməsi.**

Seçimin həcmi kifayət qədər böyük olduqda paylanma funksiyasının qiy-mətləndirilməsinin qurulması çətinlik yaradır. Bu halda, paylanma və sıxlıq fun-ksiyalarının qiymətləndirilmələrini qurmaq üçün qruplaşdırılmış seçmələrdən istifadə edilir.

Sıxlıq funksiyasının qiymətləndirilməsi olaraq tezliklərin histoqramı və poliqo-nu götürülür.

**Tərif 4.** i-ci qruplaşdırma intervalında sabit qiymətini alan hissə–hissə sabit funksiyaya qruplaşdırılmış seçmənin tezliklərinin histoqoramı deyilir.



Histoqramın statistik məlumatların əyani təsvir üsullarından biridir. Histoqramın qrpafiki altında qalan pilləvari fiqurun sahəsi seçmənin həcminə bərabərdir.

Eyni qayda ilə nisbi tezliklərin histoqramı təyin edilir. Bu halda uyğun pilləvari fiqurun sahəsi 1–ə bərabərdir.

Qeyd edək ki, seçimin həcmi artdıqca və qruplaşdırma interva­lının uzunluğu kiçildikcə, nisbi tezliklərin histoqramı baş yığımın sıxlıq funksiyasının statistik analoqu olar.

Histoqramı qurmaq üçün *X* təsadüfü kəmiyyətinin qiymətlər oblastı eyni uzun-luqlu intervallara (qruplaş­dırma intervallarına) ayrılır və hər bir intervala düşən elementlərin sayı (intervalın tezliyi) tapılır. Qruplaşdırma intervallarının uzunlu-ğunu b, *i*–ci qruplaşdırma intervalının tezliyini isə *ni* ilə işarə edək. Düzbucaqlı koordinat sistemində oturacaqları qruplaşdırma intervalları və hündürlükləri uyğun olan düzbucaqlıları quraq. Alınan pilləvari fiqura seçmənin histoqramı deyilir.



Aydındır ki, qurulmuş hər bir düzbucaqlının sahəsi olar. Bernulli teoreminə əsasən *n→∞* olduqda nisbi tezliyi ehtimala görə *X* təsadüfü kəmiyyətinin *i*–ci intervaldan qiymət alması ehtimalına yığılacaqdır. Qruplaşdırma intervallarının *b* uzunluqları kifayət qədər kiçik, *X* təsadüfü kəmiyyətinin *f(x)* sıxlıq funksiyası isə kəsilməz olduqda bu ehtimal təqribən *f(zi)⋅b* olar. Burada, *zi* *i*–ci qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsidir.



Deyilənlərdən aydın olur ki, seçmənin həcmi kifayət qədər böyük, qruplaşdırma intervallarının *b* uzunluqları isə kifayət qədər kiçik olduqda qurulmuş düzbucaq-lıların hündürlüklərinə *f(x)* sıxlıq funksiyasının uyğun qruplaşdırma interval-larının *zi* orta nöqtəsindəki qiymətləri kimi baxmaq olar. Beləliklə, histoqramın yuxarı sərhədlərinə müşahidə edilən *X* təsadüfü kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasının analoqu kimi baxmaq olar. Bununla yanaşı histoqramın bir sıra çatışmamazlıqları vardır. Bu çatışmamazlıqlara qruplaşdırma intervallarının qurulması üsullarının qeyri–müəyyənliyi, qruplaşdırma zamanı informasiyanın itirilməsini (bu zaman seçmə məlumatlar əvəzinə onların tezliklərindən istifadə edilir) göstərmək olar. Ona görə də histoqramdan statistik məlumatların ilkin təhlilində istifadə etmək məqsədəuyğundur.



**Tərif 5.** Təpə nöqtələri uyğun olaraq , və olan sınıq xətlərə müvafiq olaraq tezliklərin poliqonu və nisbi tezliklərin poliqonu deyilir.



Tərifdən görünür ki, nisbi tezliklərin poliqonu, tezliklərin poliqonunu *OY* oxu boyunca *n* dəfə sıxmaqla alınır.

Baş yığımın sıxlıq funksiyası kifayət qədər hamar funksiya olduqda, nisbi tezlik-lərin poliqonu histoqrama nisbətən sıxlıq funksiyasının daha yaxşı qiymətlən-dirilməsi olur.

Qeyd etdiyimiz kimi, statistik məlumatların histoqram vasitəsilə təsvirində na-məlum sıxlıq funksiyası hissə–hissə sabit funksiyaya yaxınlaşır. Riyazi analizdən məlumdur ki, *f(x)* kifayət qədər hamar funksiya olduqda onun hissə–hissə xətti funksiyalarla kifayət qədər yaxşı yaxınlaşmaları vardır. Buradan aydın olur ki, hamar sıxlıqların qiymətləndirilməsində daha dəqiq üsullardan istifadə etmək olar. Bu üsullardan biri seçimin poliqonunun qurulmasından ibarətdir.

Qurulmuş histoqrama əsasən qruplaşdırma intervallarının orta nöqtələrinin ordinatlarını ardıcıl olaraq düz xətt parçası vasitəsilə birləşdirdikdə alınan sınıq xətt poliqon olacaqdır.

**5. Paylanma əyriləri. Statistik paylanmaların əsas formaları**

Empirik paylanma funksiyası vahid ehtimalla baş yığımın paylanma funksiyasına yığılır. Buradan aydın olur ki, qruplaşdırma intervalları sonsuz olaraq kiçildikcə və hər bir belə intervalda elementlərin sayı kifayət qədər olarsa paylanmanın poliqon və histoqramı daha səlis olacaq, bu və ya digər formaya malik səlis əyriyə yaxınlaşacaqdır. Empirik paylanmanın yaxınlaşdığı limit əyrisinə paylanma əyrisi deyilir.

Adətən məhdud həcmli seçimlər üçün statistik material qrafik olaraq poliqon və histoqram vasitəsilə təsvir edilir. Onlar isə baş yığımın paylanma əyrisinin yaxınlaşması kimi qəbul edilir. Seçmə məlumatlara əsasən baş yığımın paylanma əyrisinin tapılması riyazi statistikanın əsas məsələlərindən biridir.

Əməli məsələlərin həllində paylanmaların müxtəlif formalarına təsadüf edilir. Paylanmanın limit qrafikinə, yəni paylanma əyrisinin forma­sına statistik paylan-manın forması deyilir.

Təcrübədə birtəpəli və çoxtəpəli (birmodalı və çox modalı) paylanmaları fərq-ləndirilirlər.

Çoxtəpəli paylanmalar üçün növbələşən maksimum və minimum­ların mövcud-luğu xarakterikdir. Paylanmanın çoxtəpəliliyi öyrənilən yığımın qeyri bircinsliliyi-nə dəlalət edir.

Bir təpəli paylanma əyrilərini əsasən aşağıdakı qruplara bölürlər:

1) simmetrik; 2) orta asimmetrik; 3) müntəzəm; 4) kəsilməz; 5) kəskin asim-metrik (*J*–surətli); 6) *U*–surətli (çökük).

Simmetrik paylanmalarda elementlərin tezlikləri hər hansı səpələnmə mərkəzin-dən uzaqlaşdıqca azalır və paylanmanın mərkəzindən hər iki tərəfdə bərabər olur-lar. Bu cür paylanmaların əyriləri orta qiymətin ordinatına nisbətən simmetrik olurlar. Məsələn, normal paylanma simmetrik paylanmadır.

Empirik paylanmalar adətən asimmetrik olurlar. Əgər səpələnmə mərkəzinin bir tərəfində digərinə nisbətən tezliklər əhəmiyyətli dərəcədə azalırsa belə paylan-malara orta asimmetrik paylanmalar deyilir. Bu cür paylanmalarda mərkəzdən eyni uzaqlıqda əlamətin qiymətlərinin ordinatları müxtəlif olurlar.

Əgər ən böyük tezlik paylanmanın uclarından birində olarsa bu cür paylanmaya kəskin asimmetrik paylanma deyilir.

Statistika təcrübəsində bəzi hallarda çökük formaya malik və *U* latın hərfini xatırladan paylanmalara təsadüf edilir. Bu cür paylanmalara *U*–surətli paylanmalar deyilir. Belə paylanmalarda minimal tezlik səpələnmə mərkəzinə yaxınlıqda yerlə-şir və ondan paylanmanın uclarına yaxınlaşdıqca tezliklər artır.

# MÖVZU 10. Təsadüfü SEÇİMİN ƏDƏDİ XARAKTERİSTİKALARI

**P L A N**

**1. Statistik paylanmaların tədqiqinin əsas məsələləri**

**2. Təsadüfü seçimin ədədi xarakteristikaları**

## 2.1. Yerləşmə xarakteristikaları

**2.1.1. Seçmə orta. Üstlü orta və onun xassələri.**

**2.1.2. Təsadüfü seçimin modası. Modanın hesablanmasl üçün xətti interpolyasiya düsturu.**

**2.1.3.Təsadüfü seçimin medianı və kvartili. Median və kvartilin hesablanmasl üçün xətti interpolyasiya düsturları.**

**2.1.4. Seçmə ortanın xassələri.Orta qiymət haqqında teorem.**

## 3.Səpələnmə xarakteristikaları

## 3.1. Səpələnmə xarakteristikaları

**3.2. Dispersiyanın xassələri.**

**3.3. Alternativ əlamətin dispersiyası.**

**3.4.Dispersiyaların toplanması qanunu.**

## 5. Riyazi gözləmə və dispersiyanın hesablanması üçün şərti sıfır (moment) üsulları.

**6. Təsadüfi seçimin momenti.Mərkəzi və başlanğıc momentlər.**

**7. Empirik paylanmanın tədqiqi.Asimmetriya və ekses əmsalları.**

**6.İkiölçülü təsadüfü kəmiyyətin təsviri və ədədi xarakteristikaları.**

Ə D Ə B İ Y Y A T

1.S.Ö.Ömərov, N.Ə.cavadov.Riyazi və tətbiqi statisyika.Bakı, Azərnəşr, 2007.

2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çaşıoölu, 2006.

# MÖVZU 10. SEÇMƏNİN ƏDƏDİ XARAKTERİSTİKALARI

**1.Statistik paylanmaların tədqiqinin əsas məsələləri.**

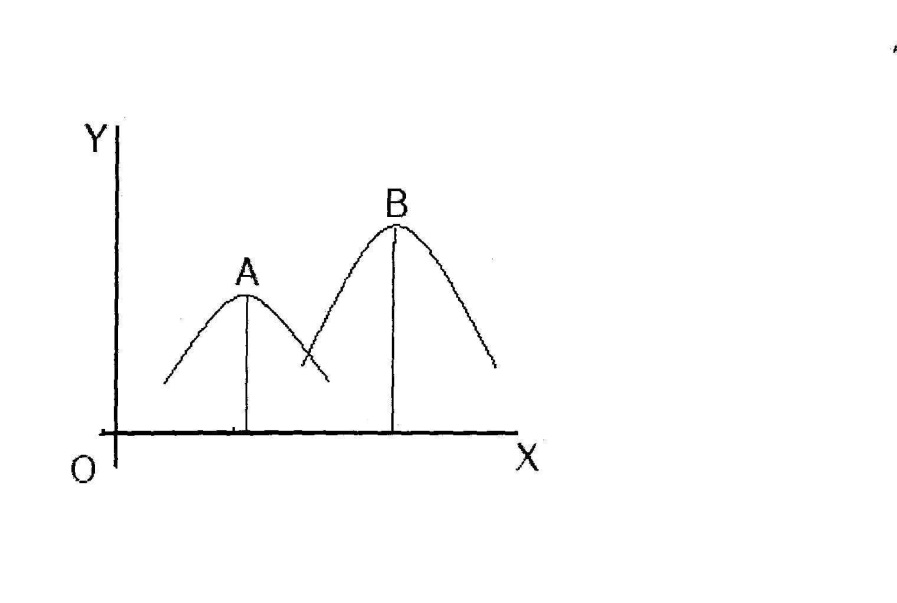
Bildiyimiz kimi,kimi təcrübi verilənlərin işlənilmə­sində birinci mərhələ pay-lanmanın variasiya sırasının qurulma­sından ibarətdir. Variasiya sırasının cədvəl və yaxud qrafik şəklində təsviri paylanmanın daha ümumi və səciyyəvi xüsu-siyyətləri haqqında ilkin təsəvvür yaratmağa imkan verir. Bu isə paylanmanın müşahidə nəticə­sində formalaşan ’’gizli’’ qanunauyğunluqlarının aşkar edil­mə-sində atılmış ilkin addımdır. Bununla yanaşı yığımların statis­tik təhlilinə əlamətin müşahidə edilən qiymətlərinin sadəcə olaraq nizamlanması ilə kifayətlənmək olmaz. Paylanma sıraları və onların müvafiq təsvirləri bütün ilkin məlumatları özündə əks etdirdiklərinə görə kifayət qədər mürəkkəb olurlar. Ona görə də paylanmanın statistik təsvirinin daha rasional üsulu onun mühüm xüsusiyyətlərini özündə əks etdirən ədədi xarakteristikalarının hesablanmasıdır. Bu xarakte­ristikalar obyektiv bir göstərici kimi yığımın real xüsusiyyətlərini özündə əks etdirməli və verilmiş paylanma haqqında bütün mümkün məlumatların nəzərə alınmasına əsaslanmalıdır.

Statistik paylanmanın əsas xüsusiyyətlərinin ədədi xarakteris­tikalar vasitəsilə ifadə edilməsi, baxılan yığıma xas olan qanunauyğun­luqların daha dərindən və hərtərəfli öyrənilməsinə təminat yaradır.

Məntiqi cəhətdən hər şeydən əvvəl bu xarakteristikaların hansı xüsusiyyətləri əks etdirməsinin zəruriliyi ilə tanış olaq. Bunun üçün şəkil 1-də göstərilən *A* və *B* paylanmalarına baxaq:

Bu paylanmaların ədədi xarakteristikalar vasitəsilə ifadə edilə bilən mühüm xüsusiyyətləri ilə tanış olaq:

1.Şəkildən göründüyü kimi hər iki paylanmada yığımın ele­ment­ləri əlamətin müəyyən mərkəzi qiyməti ətrafında yerləşmişlər. Bu cür hal bütün statistik paylanmalara xasdır. Ona görə də statistik pay­lanmaların tədqiqində qarşıya çıxan birinci məsələ onların mərkəzi qiymətinin, yəni orta səviyyəsinin müəyyən edilməsindən ibarətdir. Bu məqsədlə paylanmanın yerləşmə xarakteristikaları (mərkəzi meyl xarakteristikaları) hesablanılır.



Şəkil 1. Müxtəlif ortalara və dispersiyalara malik paylanmalar.

**m1**

**m2**

2.Paylanmalar mərkəzi qiymətlərlə yanaşı əlamətin qiymətlə­rinin onun ətrafında səpələnməsinə görə də fərqlənirlər.

Beləliklə, paylanma sıralarının tədqiqində ikinci məsələ əlamətin səpələnmə xarakteristikalarının axtarılmasından ibarətdir.

3.Müxtəlif formalı paylanma əyrilərinin tədqiqi göstərir ki, on­lar simmetriklik cəhətdən fərqlənirlər. Bununla əlaqədar olaraq üçüncü mühüm məsələ paylanmaların asimmetriya dərəcəsini müəyyən et­məkdən ibarətdir.

4.Müxtəlif paylanma əyrilərinin normal əyri ilə müqayisəsi gös­tə­rir ki, bəzi paylanma əyriləri normal əyriyə nisbətən absis oxu boyun­ca ’’sıxılmış’’, digərləri isə ’’dartılmış’’ olurlar. Ona görə də paylanma əyrilərinin normal əyriyə nisbətən yerləşmə vəziyyətinin öyrənilməsi də mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

**2.Təsadüfü seçimin ədədi xarakteristikaları.**

Ümumi şəkildə paylanma sıralarının statistik təsviri yerləşmə və səpələnmə xarakteristikalarının hesablanmasından, paylanmanın asimmetriya dərəcəsini müəyyən etməkdən ibarətdir.

Yuxarıda deyilənləri nəzərə alaraq paylanma sıralarının statistik xarakteris-tikaları ilə tanış olaq.

Tutaq ki, paylanma funksiyası olan baş yığımdan həcmi *n* olan təsadüfi seçimdir.



**Tərif 2.1.** Təsadüfi seçimi təşkil edən qiymətlərini uyğun olaraq ehtimalları ilə alan diskret təsadüfü kəmiyyətin ədədi xarakteristikalarına seçmənin ədədi xarakteristikaları deyilir.



Ədədi xarakteristikaları üç qrupa–yerləşmə, səpələnmə və empirik paylanmanın normal paylanmaya nəzərən vəziyyətini müəyyən edən ədədi xarakteristikalara bölürlər.

## 

## 2. Yerləşmə xarakteristikaları.

**2.1.1. Seçmə orta. Üstlü orta və onun xassələri.**

**Tərif 2.1.** Seçimin yerləşmə xarakteristikası elə sabitə deyilir ki, seçmənin bü-tün elementləri bu sabit ətrafında qruplaşmış olsun.

Riyazi gözləmə, moda və median ən çox istifadə edilən yerləşmə xarakteristika-larıdır.

**Tərif 2.2.**–dən istifadə edərək seçmənin bu xarakteristikala­rının hesablanması üçün uyğun düsturları verək.

Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki, qiymətlərini uyğun olaraq ehtimalları ilə alan X diskret təsadüfü kəmiyyətinin riyazi gözləməsi



düsturu ilə hesablanır.

Burada, nəzərə alsaq ki, ixtiyari i= üçün , onda olduğunu alarıq.



Axırıncı düsturun sağ tərəfindəki ifadə seçmə orta adlanır və ilə işarə edilir.



Beləliklə,



Tutaq ki, təsadüfü seçimin *x1, x2, …,xn*elementləri içərisində *k (k<n)* sayda müxtəlif olan *z1,z2,…, zk* elementləri vardır.Onda , və olduğunu alarıq.



düsturuna seçmə ortanın sadə, düsturuna isə çəkili düs-turu deyilir.



Təcrübədə seçimin bütün elementləri müxtəlif və yaxud eyni tezliklərə malik olduqda sadə, əks halda isə çəkili düsturdan istifadə etmək məqsədəuyğundur.

Qruplaşdırılmış seçmələr üçün riyazi gözləməni çəkili düstur ilə hesablamaq olar. Belə ki, burada *zi* *i*–ci qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsi, *ni* isə seçmənin intervalda yerləşən elementlərinin sayı, yəni intervalın tezliyidir.

**Teorem 2.1.** Seçimin elementlərinin seçmə ortadan kənarlaşmaları cəmi sıfıra bərabərdir. Yəni ,



**Isbatı.** Doğrudan da



olduğunu nəzərə alsaq, olduğunu alarıq.



Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki, qiymətlərini uyğun olaraq , ehtimalları ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyətin həndəsi və harmonik ortaları uyğun olaraq



;



düsturları ilə hesablanılır. İxtiyari üçün olduğunu nəzərə alsaq



və



olduğunu alarıq. Deməli, təsadüfü seçimin həndəsi ortası



harmonik ortası isə



düsturunun köməyi ilə hesablanır.

Uyğun çəkili düsturlar və şəklində olar. Üstlü ortanın ümumi şəkli aşağıdakı kimidir:



*k* qüvvətinin dəyişilməsilə, seçmə ortasının müxtəlif növlərini almaq olar:



*k= –1* olduqda harmonik orta alınır:



Aydındır ki, *k=0* olduqda həndəsi orta aklnır:

hən=



*k=1* olduqda hesabı orta kəmiyyət alınır.



*k=2* olduqda isə kvadratik orta kəmiyyət alınır.



Aydındır ki, eyni bir seçmə üçün hesablanmış müxtəlif orta kəmiyyətlər də müxtəlif olacaqdır. *k* qüvvəti artdıqca uyğun orta kəmiyyət artır:

har<hən<hes<kv



Üstlü ortaların bu xassəsi majorantlıq xassəsi adlanır. Bu münasibəti birinci dəfə A.Y. Boyarski isbat etmişdir.

Orta kəmiyyətin bu və ya digər növünün seçilməsi tədqiqatların məqsədindən, ilkin məlumatların xarakterindən və orta kəmiyyəti hesablanan göstəricinin iqtisadi mahiyyətindən asılıdır. Əlamətin dəyişən qiymətlər yığımını hər hansı bir ədədlə xarakterizə etmək zərurəti yarandıqda əlamətin paylanmada orta qiyməti göstəricisindən istifadə edilir. Bu zaman əlamətin dəyişən qiyməti onların seçmə ortası ilə əvəz edilir. Bu isə o zaman mümkün olar ki, aparılan əməliyyat öyrənilən əlamətə görə yığımın əsas xassəsini dəyişməsin.

**2.1.2. Təsadüfi seçimin modası. Modanın hesablanmasl üçün xətti interpolyasiya düsturu.**

**Tərif 2.3.** Təsadüfü seçimin ən böyük tezliyə malik olan elementinə seçmənin modası deyilir.

Qruplaşdırılmamış seçmələr üçün modanı təyin etmək üçün heç bir hesablama aparmaq lazım gəlmir. Belə ki, tərifə əsasən paylanma sırasında ən böyük tezliyə uyğun olan element moda olacaqdır.

Qruplaşdırılmış seçmələr üçün xətti interpolyasiya düstu-runun köməyi ilə təyin edilir.



Burada *X0* –modal intervalın başlanğıc nöqtəsi, *b*–onun uzunluğu, *n2*– modal intervalın, *n1*–modal intervaldan əvvəlki, *n3*–isə modal intervaldan sonra gələn intervalın tezliyidir.

**2.1.3.Təsadüfi seçimin medianı və kvartili. Median və kvartilin**

**hesablanmasl üçün xətti interpolyasiya düsturları.**

**Tərif 2.4.** Seçmənin variasiya sırasını hər birində təxminən eyni sayda element olan iki bərabər hissəyə ayıran elementə seçimin medianı deyilir.

Qruplaşdırılmamış seçmələr üçün bilavasitə tərifə əsasən median seçimin həcmi *n* tək ədəd *(n=2l+1)* olduqda *h=x(l+1)* ,cüt ədəd *(n=2l)* olduqda isə kimi hesablanır.



Qruplaşdırılmış seçmələr üçün medianı aşağıdakı iki təqribi üsulla hesablamaq olar.

1) Seçmənin elementi olaraq qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsi götürü-lür və median seçmənin həcminin təkliyi və cütlüyündən asılı olaraq yuxarıda göstərilən müvafiq düsturlar vasitəsilə hesablanılır.

2)



Bu düstur medianın hesablanması üçün xətti interpolyasiya düsturudur. Burada *X0* median intervalın başlanğıc nöqtəsi, *nm*–onun tezliyi, *Sm-1* isə median interval-dan əvvəlki intervalların tezlikləri cəmidir.

Aydındır ki, birmodalı simmetrik paylanmalar üçün hesabi orta, moda və median bir–birinə bərabərdir. Bunu asimmetrik paylanmalar üçün demək olmaz. K.Pirson paylanma əyrilərinin müxtəlif növlərinin hamarlaşdırılması əsasında yerləşmə xarakteristikaları arasında aşağıdakı təqribi bərabərliyin doğru olduğunu göstərmişdir:



Hesabi orta və medianın təyini nisbətən asan olduğuna görə axırıncı bərabərlik-dən modanın hesablanması üçün



və ya



təqribi düsturlarını alarıq.

Riyazi statistikada əlamətin variasiyasını ölçmək üçün dispersiya və orta kvadratik kənarlaşma ilə yanaşı kvantil göstəricisindən də istifadə edilir. Bu gös-tərici median anlayışını bir qədər genişləndirməklə qurulur.

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, median variasiya sırasını iki bərabər hissəyə ayırır. Alınmış hissələri yenidən iki bərabər hissəyə ayırmaqla, əlamətin elə qiymətlərini tapmaq olar ki, onlar variasiya sırasını dörd bərabər hissəyə ayırsın və s. Əlamətin variasiya sırasını eyni sayda variantlardan ibarət olan hissələrə ayıran qiymətlərinə kvantil və yaxud qradiyent deyilir. Kvartil, desil, sentil kvantilin xüsusi hallarıdır.

Əlamətin variasiya sırasının dörd bərabər hissəyə ayıran qiymətlərinə kvartil deyilir. Desil və sentil uyğun olaraq əlamətin variasiya sırasını on və yüz bərabər hissələrə ayıran qiymətlərinə deyilir.

Əlamətin variasiya sırasını dörd bərabər hissələrə ayıran qiymətlərini *Q1, Q2* və *Q3*ilə işarə edək.

Aydındır ki, əlamətin qiymətlərinin hissəsi birinci *Q1* kvartilindən solda, hissəsi isə ondan sağ tərəfdə yerləşir. İkinci *Q2*kvartili variasiya sırasını iki bərabər hissəyə ayırdığına görə o median ilə üst–üstə düşür.



Variantların hissəsi *Q1*–dən solda, hissəsi *Q1* və *Q2* arasında, hissəsi *Q2* və *Q3* arasında, hissəsi isə *Q3*–dən sağda yerləşir.



Qruplaşdırılmış seçmələr üçün əlamətin kvartil qiymətlərini müəyyən etdikdə



interpolyasiya düsturlarından istifadə edilir.

Burada, və uyğun olaraq *Q1* və *Q3* kvartillərini öz daxilində saxlayan intervalların sol uclarıdır; və kvartil intervalların tezlikləridir; *n*–seçmənin həcmi, *h* isə qruplaşdırma intervallarının uzunluğudur; və kvartil inter-valdan əvvəlki intervalların tezlikləri cəmidir (yığılmış tezlik).



**2.1.4. Seçmə ortanın xassələri.Orta qiymət haqqında teorem.**

Tutaq ki, *x* və *y* baş yığımları arasında *y =x+*b xətti asılılığı vardır (burada *a* və *b* ixtiyari sabitlərdir).



**Teorem 2.2.** *y = x+b* olduqda olar.



**İsbatı.** *x* və *y* baş yığımları arasında *y =x+b* xətti asılılığı olduğuna görə *y j=zj+b, j=*olar.



Tərifə əsasən



və olduğunu nəzərə alsaq, olduğunu alarıq.



Teorem 2.2–dən hesabi ortanın aşağıdakı xassələrini almaq olar.

**Xassə 2.1.** Seçmənin elementlərini eyni bir *b* kəmiyyəti qədər artırsaq (azaltsaq), hesabi orta da *b* qədər artar (azalar).

**Xassə 2.2.** Seçmənin elementlərini dəfə artırsaq (azaltsaq) hesabi orta da dəfə artar (azalar).



2.1 və 2.2 xassələrinə hesabi ortanın monotonluq xassəsi deyilir.

və



işarə edək. Aydındır ki,



olar. Yəni hesabi orta daxili ortadır.

Hesabi orta assosiativlik xassəsini də ödəyir.

**Xassə 2.3.** Seçmənin elementlərinin bir hissəsini onların xüsusi ortası ilə əvəz etsək hesabi ortası dəyişməz.

**Xassə 2.4.** Hesabi ortadan kiçik olan elementlərin hesabi ortadan kənarlaşmaları cəmi, hesabi ortanın ondan böyük elementlərdən kənarlaşmaları cəminə bərabərdir.

**Xassə 2.5.** Seçmənin elementlərinin tezliklərini d dəfə artırsaq (azaltsaq) hesabi orta dəyişməz.

Tutaq ki, bir qrup elementlər çoxluğu vardır. *i*–ci () qrupun elementləri sayını *ni*, seçmə ortasını isə i ilə işarə edək. Bu qrupları birləşdirdikdə alınan yeni yığımın seçmə ortasını ilə işarə edək. i–lərə () qrup ortaları, –ə isə ümumi orta deyilir.



**Teorem 2.3** (orta qiymət haqqında). Ümumi orta qrup ortalarının hesabı çəkili ortasına bərabərdir. Yəni



**İsbatı.** Tutaq ki, qruplar aşağıdakı şəkildədir.

*1*–ci qrup –



*2*–ci qrup –



---------------------------------

*1*–ci qrup –



onda , i=1,2,...,l olar.



olar.



Deməli,



## 

## 3.Səpələnmə xarakteristikaları

## 3.1.Səpələnmə xarakteristikaları

**Tərif 2.5.** Seçmənin elementlərinin onun hər hansı yerləşmə xarakteristikası ətrafında nə dərəcədə sıx səpələnməsinin ölçüsünü göstərən sabit ədədə onun səpələnmə xarakteristikası deyirlər.

Aşağıda baxacağımız variasiya genişliyi, orta xətti meyl, dispersiya, orta kvad-ratik meyl, variasiya əmsalı seçmənin səpələnmə xarakteristikalarıdır.

**Tərif 2.6.** Seçmənin ən böyük elementi ilə ən kiçik elementi arasındakı fərqə seçmənin variasiya genişliyi deyilir.

Variasiya genişliyini *R* ilə işarə etsək,

*R=x(n)-x(1)*

olduğunu yaza bilərik. Beləliklə, variasiya genişliyi seçmənin elementlərinin bir–birindən tərəddüdlərinin ən yüksək həddini göstərir.

İndi isə seçmənin orta xətti meylinin və dispersiyasının hesablanması üçün uy-ğun düsturları verək. Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki, *x1, x2, …,xn*qiymət-lərini uyğun olaraq *pi=P(X=xi),* ehtimalları ilə alan diskret təsadüfi kəmiy-yətin orta xətti meyli və dispersiyası uyğun olaraq.



və



düsturları ilə hesablanır. Seçmə üçün olduğunu nəzərə alsaq, seç-mənin orta xətti meyli və dispersiyası üçün uyğun olaraq



2



düsturlarını alarıq. Seçmənin elementləri müxtəlif tezliklərə malik olduqda orta xətti meylin çəkili düsturu



dispersiyasının çəkili düsturu isə



şəklində yazılar.

**Tərif 2.7.** ədədinə seçmənin orta kvadratik meyli



ədədinə isə onun variasiya əmsalı deyilir.

Tərifə görə, variasiya əmsalı orta kvadratik meylin riyazi gözləməyə faizlə nisbətidir. Başqa sözlə, *v* kəmiyyəti *σ*–nın –in neçə faizi olduğunu göstərir.



Orta xətti və orta kvadratik meyl hadisələrin təbii xüsusiyyətlərinə uyğun ölçü vahidləri ilə ifadə olunduqlarına görə, onlar müxtəlif kəmiyyətlərin orta tərəddüd dərəcələrini bir–biri ilə müqayisə etməyə imkan vermir. Variasiya əmsalı müxtəlif ölçü vahidləri ilə ifadə olunan bir neçə kəmiyyətin orta tərəddüd dərəcələrini müqayisə etməyə imkan verir.

Hər hansı yığımda müxtəlif amillərin və yaxud bir amilin müxtəlif ortaya ma-lik bir neçə yığımlarda tərəddüd dərəcələrini müqayisə etmək üçün nisbi variasiya göstəricilərindən istifadə edilir. Bu göstəricilər mütləq variasiya göstəricilərinin orta kəmiyyətə (və yaxud mediana) nisbəti kimi hesablanır. Mütləq göstərici olaraq, variasiya genişliyini, orta kvadratik kənarlaşmanı və kvartil kənarlaşmanı götürməklə nisbi variasiya göstəricilərini müəyyən etmək olar.

Osilyasiya əmsalı



Nisbi xətti kənarlaşma



Variasiya əmsalı



Kvartil variasiyası

və ya



Praktikada ən çox istifadə edilən variasiya əmsalıdır. Bu göstəricidən müxtəlif əlamətlərin variasiyasını müqayisə etməklə yanaşı, yığımın bircinsliyini müəyyən etmək üçün də istifadə edilir. Belə ki, normal paylanmaya və yaxud ona yaxın olan paylanmaya malik yığımlarda variasiya genişliyi 33%–i aşmadıqda onlar bircinsli hesab edilir.

Qeyd etmək lazımdır ki, bəzi hallarda dispersiyanı



düsturunun köməyi ilə hesablamaq əlverişli olur.

Doğrudan da, tərifə əsasən





və



olduğunu nəzərə alsaq, düsturun doğruluğu alınar.

**3.2. Dispersiyanın xassələri.**

**Teorem 2.4.** Tutaq ki, *x* və *y* baş yığımları arasında *y=ax+b* xətti asılılığı vardır. Onda

*σu2 =a2 ∙σx2*

olar.

**İsbatı:** *y=ax+b* olduğuna görə

*yi=a zi+b,* olar.



Teorem (2.2)–yə əsasən



Onda,



Beləliklə,



Teorem 2.4-dən aşağıdakı nəticələrə gəlmək olar.

**Nəticə 2.1.** Seçmənin bütün elementlərini eyni kəmiyyət qədər artırsaq və yaxud azaltsaq dispersiya dəyişməz. Yəni *σ2x= σ2x±A.*

**Nəticə 2.2.**Seçmənin bütün elementlərini *k* dəfə artırsaq (azaltsaq) dispersiya *k2* dəfə artar (azalar). Yəni

və



**Nəticə 2.3.** Elementlərin tezliklərini k dəfə artırsaq (azaltsaq) dispersiya dəyişməz.

Doğrudan da,



**Nəticə 2.4** (Dispersiyanın minimallıq xassəsi):

cəmi özünün ən kiçik qiymətini =‾*x* olduqda alır.



Yəni,



Doğrudan da, . Buradan olduğunu alırıq. Axırıncı tənlikdən



olduğunu tapırıq.



**3. 3. Alternativ əlamətin dispersiyası**

Statistik təhlildə tez–tez alternativ əlamətin dispersiyasına təsadüf edilir. Statis-tika əlamətin variasiyasını öyrənməklə yanaşı əlamətə malik olan və ya olmayan vahidlərin hissəsini də öyrənir.

Tutaq ki, həcmi n olan seçmədə m sayda element əlamətə malikdir, qalan *n–m* sayda element isə əlamətə malik deyildir. Onda əlamətə malik olanların hissəsi , malik olmayanlarınkı isə olar. Aydındır ki, *p+q=1*.



Alternativ əlamətin variasiyasının kəmiyyət ölçüsünü müəyyən etmək üçün şərti olaraq əlamətin varlığını *’’1’’* ilə, yoxluğunu isə *’’0’’* ilə işarə edək. Onda alterna-tiv əlamətin paylanma sırasını aşağıdakı kimi təsvir etmək olar.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *xi* | *0* | *1* |
| *ni* | *q* | *p* |

Alternativ əlamətin orta qiyməti



olar. Dispersiya isə



olar. Alternativ əlamətin orta kvadratik kənarlaşması isə



olar. Eyni zamanda aydındır ki, *pq* hasili özünün maksimum qiymətini *p=q= ½* olduqda alır. Ona görə də alternativ əlamətin dispersiyasının maksimal qiyməti *0,25* olar.

## 3.4.. Dispersiyaların toplanması qanunu.

Bir çox hallarda təcrübədə bir neçə qrupun birləşməsindən alınan yığımı və tər-sinə baş yığımın ayrı–ayrı qruplara bölünməsindən alınan yığımları öyrənmək lazım gəlir. Eyni zamanda baş yığımın və onu təşkil edən qrupların xarakte-ristikaları arasındakı əlaqəni müəyyən etmək lazım gəlir. Biz riyazi gözləmələr arasındakı əlaqənin orta qiymət (teorem 2.3 ) haqqında teorem vasitəsilə verildiyini isbat etdik. İndi isə dispersiyalar arasındakı əlaqəni verək. Bu əlaqə dispersiyaların toplanması qanunu ilə verilir.

Tutaq ki, bir qrup elementlər çoxluğu verilmişdir:

. *i*–ci qrupdakı elementlərin sayını ni, *i*–ci qrupun riyazi gözləməsini və dispersiyasını ilə işarə edək. i = 1,2,...,l olduqda –lərə qrup ortaları, –lara isə qrupdaxili dispersiyalar deyilir. Bu qruplara bir baş yığım kimi baxsaq, onun həcmi olar. ilə baş yığımın riyazi gözləməsini, ilə isə dispersiyasını işarə edək



ifadəsinə qruplararası dispersiya deyilir.



ifadəsi isə orta qrupdaxili dispersiya adlanır.

**Teorem 2.6.** Ümumi dispersiya orta qrupdaxili dispersiya ilə qruplararası dispersiyanın cəminə bərabərdir.

Yəni



**Isbatı:** Doğrudan da



Teorem 2.1 –ə əsasən



Digər tərəfdən



və



Btləliklə, olduğunu alarıq.



5. Riyazi gözləmə və dispersiyanın hesablanması üçün şərti sıfır (moment) üsulu

Riyazi gözləmə və dispersiyanın düsturlarından aydın görünür ki, onları hesablamaq çox zəhmət tələb edir. Ona görə də bu xarakte­ristikaları hesablamaq üçün şərti sıfır üsulundan istifadə edilir. Bu üsul onların məlum xassələrinə əsas-lanır.

Tutaq ki, *X* baş yığımından həcmi *n* olan *x1, x2,…,xn* seçməsi götürülmüşdür və bu seçmənin paylanma sırası

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| zi | z1 | z2 | ... | zk |
| ni | n1 | n2 | ... | nk |

şəklindədir.

*ui=zi–c*, əvəzləməsini aparaq. Burada *c* ixtiyari sabitdir. Əvəzləmə nəticəsində alınmış *u1, u2,…,uk* ədədlərinə



*U= X–C*

baş yığımından seçmə kimi baxmaq olar. Onda teorem 2.2–yə əsasən

və ,



teorem 2.4.–ə əsasən isə

olar.



Qruplaşdırılmış seçmələrdə uyğun düsturları almaq üçün *ui=* əvəzləməsi aparmaq lazımdır. Burada, *b*–qruplaşdırma intervalının uzunluğu, *zi*–isə qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsidir. Bu halda riyazi gözləmə



dispersiya isə



düsturu ilə hesablanır. Bu düsturları açıq şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar.



və



Qeyd etmək lazımdır ki, təcrübədə adətən *C*  olaraq, ya seçmənin modası, ya da ki, riyazi gözləməyə yaxın ədəd götürülür. Belə ki, *C*–nin seçilməsi konkret məsələdən asılıdır.

**6.Təsadüfi seçimin momenti.Mərkəzi və başlanğıc momentlər.**

Tutaq ki, *X* baş yığımından həcmi *n* olan *x1, x2, …,xn* seçməsi alınmışdır və onun paylanma sırası

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| zi | z1 | z2 | ... | zk |
| ni | n1 | n2 | ... | nk |

şəklindədir. *c > o* və *s* natural ədəddir.

**Tərif 7.1.** ədədinə seçmənin *c* ədədinə görə *s*–tərtibli momenti deyilir.



Seçmənin elementləri müxtəlif tezliklərə malik olduqda *s*–tərtibli moment üçün çəkili düstur



şəklində olar.

Tərif 7.2. *c=0* olduqda momentinə başlanğıc moment, *c=* olduqda isə mərkəzi moment deyilir.



(sadə düstur)



(çəkili düstur



Mərkəzi moment üçün uyğun düsturlar aşağıdakı kimi olar.

(sadə düstur)



və (çəkili düstur)



Başlanğıc və mərkəzi momentlər arasında əlaqə düsturları aşağıdakı teoremin köməyi ilə verilir.

**Teorem 2.7.**

,



**İsbatı.** Doğrudan da istənilən α və β ədədləri üçün yaza bilərik:



Bu düstur, *α* ədədinə görə *s*–tərtibli momenti, *β* ədədinə görə *s*–dən kiçik tərtibli momentlərlə ifadə etməyə mkan verir.

Axırıncı düsturda əvvəlcə qəbul etsək



, sonra isə qəbul etsək düsturunu alarıq. Xüsusi halda aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:



m2 =b2-b12 b2=b12+m2

m3 =2b12-3b1b2+b3 b3 =b13+3b1m 2+m3

m4 =3b14+6b12b2-4b1b3+b4 b4=b14+6b12m2+4b1m3+m4

**7. Empirik paylanmanın tədqiqi.Asimmetriya və ekses əmsalları.**

Əgər baxılan empirik paylanmanın nəzəri forması məlumdursa, mər kəzi meyl və səpələnmə xarakteristikaları paylanmanın əsaslı xarak­teristikalarıdır. Beləliklə, bu halda birtərtibli və ikitərtibli momentləri bilmək kifayətdir. Belə ki, əgər tədqiq edilən hadisə kifayət qədər yaxşı öyrənilibsə və onun normal paylanmaya malik olduğu məlumdursa, onda bu paylanma birinci iki mərkəzi momentlə bir qiymətli müəyyən edilir.

Əgər öyrənilən hadisə Puasson qanununa tabedirsə, onda paylanma bir mo-mentlə (birtərtibli başlanğıc və ya ikitərtibli mərkəzi) tamamilə müəyyən edilir.

Ancaq əksər hallarda paylanmanın nəzəri forması məlum olmur. Ona görə də empirik paylanmaya əsasən nəzəri paylanmanın bəzi xassələrinin öyrənilməsi məsələsi yaranır.

Empirik paylanmanın qrafikini (poliqon və ya histoqram) qurmaqla nəzəri paylanma qanunu haqqında təxmini təsəvvür yarat­maq olar. Empirik paylanma isə baş yığımdan götürülmüş seçməyə əsasən qurulur. Ona görə də empirik məlu-matlar müəyyən dərəcədə qiyməti məlum olmayan təsadüfi xətalarla bağlıdır. Bu təsadüflərin təsiri əlamətin dəyişməsinin əsas qanunauyğunluğunun dərk edilmə-sini çətinləşdirir. Seçmənin həcmi artdıqca poliqon hamarlaşır və səlis əyriyə çevrilir. Alınmış əyriyə paylanma əyrisi deyilir.

Paylanma əyrisi baş yığımın paylanmasını (nəzəri paylanma) xarakterizə edir. Paylanmanın formasının tədqiqi aşağıdakı üç məsələnin həllini nəzərdə tutur:

1) Paylanmanın ümumi xarakterinin aydınlaşdırılması;

2) Empirik paylanmanın hamarlandırılması, yəni verilmiş formaya malik *f(x)* əyrisinin qurulması;

3) Tapılmış nəzəri paylanmanın empirik paylanmaya uyğunluğunun yoxlanılması.

Statistik tədqiqatda müxtəlif növ paylanmalara təsadüf edilir. Bircins yığımlar bir qayda olaraq birtəpəli paylanmalara malik olurlar. Çoxtəpəlilik yığımın bircins olmamasına dəlalət edir. Paylanmanın ümumi xarakterinin aydınlaşdırılması onun bircinslik dərəcəsinin qiymətləndirilməsini və asimmetriya və ekses əmsallarının hesablan­masını nəzərdə tutur. Simmetrik paylanmalarda mərkəzdən eyni uzaqlıqda yerləşən variantlar eyni tezliklərə malikdirlər. Bu paylanmalar üçün hesabi orta, moda və median bir–birinə bərabərdir. Ona görə də sadə asimmetriya göstəricisi olaraq bu göstəricilərin fərqini qəbul etmək olar. fərqi nə qədər böyük olsa, paylanmanın asimmetriyası bir o qədər böyük olacaqdır.



Bir neçə yığımın asimmetriya dərəcəsinin müqayisəli təhlili üçün nisbi



göstəricisi hesablanır. Bu göstərici müsbət və mənfi qiymətlər ala bilər.

*AS >0* olması sağ tərəfli asimmetriyanın olduğunu göstərir (sağ budaq maksi-mal ordinatına görə sol budağa nisbətən daha çox uzadılmışdır).

Sağ tərəfli asimmetriyada mərkəzi meyl xarakteristikaları arasında



münasibəti doğrudur

*AS < 0* olması sol tərəfli asimmetriyanın olduğunu göstərir

х

f

1

х

f

2

Şəkil 2.2. Asimmetrik paylanma sırası.

*1*–sağ tərəfli asimmetriya, 2–sol tərəfli asimmetriya

Simmetrik paylanmalarda müsbət və mənfi kənarlaşmaların tək dərəcələri bir–birini yox edir.

Beləliklə, tək tərtibli mərkəzi momentlərin sıfıra bərabərliyi paylan­anın sim-metrikliyini sübut edir. Bu momentlərin sıfırdan fərqli olması isə simmetriyadan kənarlaşmanı, yəni əyilməni göstərir. Ona görə də əyilməni xarakterizə etmək üçün üç tərtibli *m3* mərkəzi momentindən istifadə edilir.

Momentlər qəbul edilmiş ölçü vahidlərindən asılı olduqlarına görə, əyilmənin ölçüsü olaraq standartlaşdırılmış nisbətindən istifadə edilir.



kəmiyyətinə asimmetriya (əyilmə) əmsalı deyilir.

Bu göstəricinin tətbiqi asimmetriya dərəcəsini təyin etməklə yanaşı əlamətin baş yığımda paylanmasında asimmetriyanın olub-olmamasını da müəyyən etməyə imkan verir.

Bu göstəricinin əhəmiyyətlilik dərəcəsi



düsturu ilə hesablanan orta kvadratik xəta vasitəsilə qiymətləndirilir. Belə ki, olduqda asimmetriya əhəmiyyətlidir və əlamətin baş yığımda paylanması simmetrik deyildir. olduqda isə asimmetriya əhəmiyyətsizdir və onun varlığı ancaq təsadüfi amillərin təsiri ilə izah edilir.



Paylanma funksiyası qrafikinin normal əyriyə görə yuxarı və aşağı olduğunu təyin etmək üçün ekses əmsalından istifadə edilir.

Dörd tərtibli mərkəzi moment vasitəsilə təyin olunan



kəmiyyəti eksesi daha dəqiq xarakterizə edir. Qeyd edək ki, normal paylanmalar üçün . Əməli məsələlərin həllində qruplaşdırılmış seçmələr üçün asimmetri-ya və ekses əmsallarını aşağıdakı düsturların köməyi ilə hesablamaq daha məqsə-dəuyğundur:



Burada şərti variantlarının dispersiyası; *b1 ,b2 ,b3*  isə həmin variantların uyğun tərtibli başlanğıc momentləridir.



х

f

ε>0

ε=0

ε<0

Şəkil . 2.3. Paylanmanın eksesi.

Ekses empirik paylanmanın təpə nöqtəsinin normal əyrinin təpə nöqtəsinə nis-bətən yuxarıda və ya aşağıda yerləşməsini göstərir.

Eksesin orta kvadratik xətası



düsturu ilə hesablanır.

**6.İkiölçülü təsadüfü kəmiyyətin təsviri və ədədi xarakteristikaları.**

Tutaq ki ikiölçülü təsadüfü kəmiyyətin müşahidələrinin həcmi olan seçimdir. Baş yığımın ilkin təsvirini seçimin elentntlərinin müstəvidə yerləşməsinə əsasən əldə etmək olar.



qiymətlərini uyğun olaraq ehtimaları ilə alan ikiölçülü dis-kret btəsadüfü vektorun paylanmasına ikiölçülü təsadüfü seçimim paylanması de-yilir. Seçmə xarakteristikalar uyğun diskret təsadüfü vektorun xarakteristiaları kimi hesablanır.



Seçmə xarakteristikaların hesablamasını aşağıdakş ardıcıllıqla aparmaq məqsədəuyğundur. Əvvəlcə



cəmləri hesablanır.

Hesablamaların düzgünlüyü



eyniliyinin köməyi ilə yoxlanılır.

Seçmə ortalar



kimi hesablanır. Sonra isə seçmə ortadan kənarlaşmaların kvadratları cəmi, və ha-sillərin və seçmə ortadan kənarlaşmaları cəmi hesablanır:



**MÖVZU 11. PAYLANMA PARAMETRLƏRİNİN STATİSTİK QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ**

**P L A N**

**1. Nöqtəvi qiymətləndirmələr və onlarin qurulmasi üsullari**

**1.1.Məsələnin qoyuluşu. Statistik qiymətləndirmələr1ər.**

**1.2. Noqtəvi qiymətləndirmələrin qurulması üsulları.**

**2. Ehtimalin nisbi tezliyə görə nöqtəvi qiymətləndirilməsi.**

**3.Etibarlılıq intervallarının qurulması.**

**3.1. Paylanma parametrlərinin etibarlılıq intervalı. Etibarlılıq ehtimalı.**

**3.2. Orta kvadratik kənarlaşma (σ) məlum olduqda naməlum riyazi gözləmə**

**üçün etibarlılıq intervalının qurulması.**

**3.3. Orta kvadratik kənarlaşma (σ) məlum olmadıqda naməlum riyazi**

**gözləmə üçün etibarlılıq intervalının qurulması.**

**4. Hadisənin naməlum p ehtimalı üçün etibarlılıq**

**intervalının qurulması.**

**5. Müxti əlif növ seçmələr üçün seçmə xətanın tapılması.**

**6. Seçimin zəruri həcminin hesablanması.**

Ə D Ə B İ Y Y A T

1.S.Ö.Ömərov, N.Ə.cavadov.Riyazi və tətbiqi statisyika.Bakı, Azərnəşr, 2007.

2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çaşıoölu, 2006.

**MÖVZU 11. PAYLANMA PARAMETRLƏRİNİN STATİSTİK QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ**

**1. Nöqtəvi qiymətləndirmələr və onlarin qurulmasi üsullari.**

**1.1.Məsələnin qoyuluşu. Statistik qiymətləndirmələr**

Tutaq ki, *X* təsadüfi kəmiyyətinin (*X* baş yığımının) paylanma funksiyası mə-lum deyil, ancaq onun hansı şəkildə funksiya olduğu və müəyyən sayda naməlum parametrlərdən asılı olan funksiyalar sinfinə daxil olduğu məlumdur. Yəni, pay-lanma funksiyası *F(x)=F(x, θ1, θ2,…, θn)* şəklindədir. Bu funksiyanı tapmaq üçün asılı olmayan *n* sınaq aparılır (*X* baş yığımından həcmi n olan təsadüfü seçim götürülür) və nəticədə *x1, x2,..xn* seçimi alınır. Məsələnin qoyuluşu *x1, x2,..,xn* seçi-minə əsasən naməlum *F(x, θ1, θ2,…, θn)* funksiyasının tapılmasından ibarətdir. Aydındır ki, bu halda naməlum paylanma funksiyasının tapılması məsələsi, onun *θ1, θ2 ,…, θn* parametrlərinin *x1, x2,..,xn* seçiminə əsasən tapılması məsələsinə gəti-rilir. Qeyd etmək lazımdır ki, ümumiyyətlə seçmə yığımın elementləri vasitəsilə naməlum parametrlərin əsl qiymətlərini tapmaq mümkün deyildir. Belə ki, bu yol-la həmin parametrlərin ancaq təqribi qiymətlərini tapmaq olar.

Tutaq ki, *F(x,θ)* paylanma funksiyası ancaq bir naməlum *θ* parametrindən asılıdır.

**Tərif 1.1.** Naməlum *θ* parametrinin *x1, x2,..xn* seçminə əsasən alınmış *θn* təqribi qiymətinə onun nöqtəvi qiymətləndirməsi deyilir.

Aydındır ki, *θn* qiymətləndirməsi seçmənin elementlərinin müəyyən funksiya-sıdır, yəni *θn=θ(x1, x2,..,xn)*. Seçmənin elementlə­rindən asılı olan istənilən funksi-yaya statistika deyilir.

Beləliklə, naməlum *θ* parametri üçün çoxlu sayda qiymətləndirmələr qurmaq olar. Onda belə bir sual qarşıya çıxır: hansı şərtləri ödəyən *θ(x1,x2,..,xn)* funksiya-sını naməlum *θ* parametri üçün ən yaxşı qiymətləndirmə hesab etmək olar?



*θn*qiymətləndirməsi aşağıdakı şərtləri ödədikdə o, digər qiymətləndirmələrə nisbətən müəyyən mənada “yaxşı” qiymətləndirmə hesab edilir.

**Tərif.1.2.** Riyazi gözləməsi qiymətləndirilən parametrə bərabər olan, yəni istə-nilən *n* üçün

*Eθ(x1, x2,..,xn)= θ*

bərabərliyini ödəyən *θn=θ(x1, x2,..,xn)* qiymətləndirməsinə *θ* parametrinin yerini-dəyişməyən (sürüşdürülməmiş) qiymətləndirməsi deyilir.

**Tərif.1.3.** Riyazi gözləməsi qiymətləndirilən parametrdən fərqli olan, yəni istənilən *n* üçün

*Eθ(x1, x2,..,xn) ≠ θ*

bərabərliyini ödəyən *θ(x1,x2,..,xn)* qiymətbndirməsinə yerinidəyişən (sürüşdürül-müş) qiymətləndirmə deyilir.

Bu halda *Eθ(x1,x2 ,.., xn)* – *θ = bn* fərqinə yerdəyişmə (sürüşmə) deyilir.

*Eθ(x1 x2 ,.., xn) = θ* şərti ödənildikdə sonlu həcmə malik müxtəlif mümkün seçmə-lərə görə qurulmuş *(x1,x2,..xn)* statistikasının qiymətləri *θ* kəmiyyəti ətrafında qruplaşacaqlar (yerləşəcəklər).



Naməlum *θ* parametrinin verilmiş seçməyə görə qiymətlən­dirməsini qurar-kən (taparkən) çalışmaq lazımdır ki, kifayət qədər böyük ehtimalla , *θ* parame-trinin əsl qiymətinə yaxın olsun. Seç­mənin həcmi kiçik olduqda təsadüfi seçmənin böyük rol oynamasına görə buna nail olmaq mümkün deyil. Ona görə də bu halda seçmənin həcminin kifayət qədər böyük olduğu fərz edilir və tələb edilir ki, *n →∞* şərtində parametrin qiymətləndirilməsi hər hansı mənada (ehtimala görə, vahid ehtimalla, orta kvadratik mənada və s.) həmin parametrin özünə yığılsın.



**Tərif 1.4.** qiymətləndirməsi *n→∞* şərtində ehtimala görə *θ* parametrinə yığılarsa, yəni kifayət qədər kiçik, istənilən *ε > 0* ədədi üçün



bərabərliyi ödənilirsə, onda ona parametrinin əsaslı qiymətləndirməsi deyilir.



Əsaslılıq xassəsi n artdıqca statistikasının paylanmasının parametrinin kifayət qədər kiçik ətrafında yerləşdiyini göstərir və statistikası üçün böyük ədədlər qanununu ifadə edir. Məsələn, əlamətin *p* hissəsinin qiymətləndirilməsi olaraq statistikasını götürdükdə münasibəti Bernulli teoreminə, baş yığımın *m* naməlum riyazi gözləməsi olaraq seçmə ortanı götür-dükdə isə Çebışev teoreminə çevrilir.



**Tərif 1.6.** və qiymətləndirmələri üçün bərabər-liyi ödənildikdə, qiymətləndirilməsi qiymətləndirməsinə nisbətən daha ef-fektiv qiymətləndirmə adlanır.



Yerinidəyişməyən qiymətləndirmələr üçün ) bərabərsizli-yi bərabərsizliyinə çevrilir.



Effektiv qiymətləndirmə dispersiyası ən kiçik olan mümkün qiymətləndirmə olur.

seçmə ortasının ən kiçik dispersiyaya malik xətti qiymətləndirmə olduğunu göstərək.



Tutaq ki, () parametrli *X* baş yığımından həcmi *n* olan *x1,x2,…,xn* seçməsi alınmışdır..



Tutaq ki, parametrinin hər hansı yerinidəyişməyən xətti qiymətləndirməsidir. Burada .



–lər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu üçün dispersiyanın məlum xassəsinə əsasən



olduğunu yaza bilərik. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, *DE(a)* –nın yeganə minimumu vardır və o, olduqda alınır. Beləliklə, ‾*x* seçmə ortası ən kiçik dispersiyaya malik xətti qiymətləndirmədir.



**1.2. Noqtəvi qiymətləndirmələrin qurulması üsulları.**

Bu paraqrafda biz nöqtəvi qiymətləndirmələrin qurulması üsul­ları ilə, konkret olaraq əvəzetmə (anoloji), ən kiçik kvadratlar, mo­mentlər və ən böyük həqiqətə oxşarlıq üsulları ilə tanış olacayıq.

***Əvəzetmə üsulu:*** Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, naməlum parametrin qiymətləndirməsi olaraq uyğun seçmə xarakteristika götürülür. Məsələn, baş yığımın naməlum riyazi gözləməsinin qiymətləndirməsi olaraq seçmə orta, dispersiya üçün seçmə dispersiya, üç tərtibli mərkəzi moment üçün üç tərtibli mərkəzi seçmə moment və s. götürülür.

***Ən kiçik kvadratlar üsulu:*** Bu üsula görə statistik qiymətləndirmə seçmənin elementlərinin statistik qiymətləndirmədən kənarlaşmalarının kvadratları cəminin mininmallaşdırılması şərtindən tapılır.

*X* baş yığımının riyazi gözləməsinin ən kiçik kvadratlar üsuluna görə statistik qiymətləndirməsini tapaq.



Bu məqsədlə *X* baş yığımından həcmi n olan *x1, x2, …,xn* seçməsini götürək. Ən kiçik kvadratlar üsuluna görə naməlum m parametrinin statistik qiymətləndirilməsi



şərtindən tapılır;

Ekstremum zəruri şərtinə əsasən



olduğunu alırıq. Buradan isə axtarılan qiymətləndirmənin



seçmə orta olduğunu alırıq.

***Momentlər üsulu:*** Statistik qiymətləndirmələrin qurulmasının ümumi üsulunu birinci dəfə K. Pirson təklif etmişdir. Bu üsula momentlər üsulu deyilir.

Momentlər üsuluna görə seçmə momentlər baş yığımın naməlum parametr-lərdən asılı olan uyğun nəzəri momentlərinə bərabər edilir. Baxılan momentlərin sayı isə naməlum parametrlərin sayına bərabər götürülür. Alınan tənliklər sistemini naməlum parametrlərə görə həll edərək axtarılan qiymətləndirməni tapırlar.

Tutaq ki, *X* baş yığımının *f(x,θ1, θ2,..., θn)* sıxlıq funksiyası *n* sayda naməlum *θ1,θ2,...,θn* parametrlərindən asılıdır. Baş yığımın birinci *n* sayda başlanğıc momentlərini təyin edək:



*m=1,2,…,n.*

Fərz edək ki, *X* baş yığımdan həcmi *k* olan *x1, x2,..,xk* seçməsi alınmışdır. Uyğun seçmə momentləri tapaq



Baş yığımın *bm* nəzəri momentlərini uyğun *b\*m* seçmə momentlərinə bərabər götürməklə



tənliklər sistemini alırıq. Alınmış tənliklər sistemini naməlum *θ1, θ2,…,θn* para-metrlərinə görə həll edərək, axtarılan *‾θ1,‾θ2,…,‾θn* qiymətləndirmələrini taparıq.

Məsələn, tutaq ki, *X* baş yığımı üstlü qanun ilə paylanmışdır. Bu halda



Onda tənliklər sistemi tənliyinə çevrilər. Buradan



isə olduğunu alırıq. Deməli, λ parametrinin axtarılan qiymətləndirilməsi seçmə ortanın tərs qiymətidir.



*X* baş yığımı normal paylanma qanununa tabe olduqda isə



, .



Bu halda tənliklər sistemi



tənliklər sisteminə çevrilir. Bu tənliklər sistemini axtarılan və parametrlərinə nəzərən həll etsək , olduğunu alırıq.



***Ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsulu:*** Müəyyən mənada «yaxşı» qiymətləndirmə-lərin qurulmasının daha optimal üsulu amerika statistiki R.Fişer tərəfindən təklif edilmiş ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsuludur. Bu üsula görə verilmiş paylan­manın naməlum parametrlərinin qiymətləndirilməsi həmin parametrlərdən asılı funksiya-nın maksimumunun axtarılması məsələsinə gətirilir.

Tutaq ki, *x1, x2,..,xk* sıxlıq funksiyası olan baş yığımdan aparılmış həcmi n olan seçmədir. *X*–diskret təsadüfi kəmiy­yət olduqda ehtimal, kəsilməz olduqda isə paylanmanın sıxlıq funk­siyasıdır. funksiyasına baxılır.



Bu funksiyanı R.Fişer həqiqətəoxşarlıq funksiyası adlandır­mışdır.

Məlumdur ki, *L(θ)* əvəzinə funksiyasına baxdıqda maksimum nöqtəsi dəyişmir. Təcrübədə adətən *L(θ)* əvəzinə funksiyasından isti-fadə edilir. Çünki bu hesablamaları əhəmiyyətli dərəcədə sadələşdirir.



Fərz edək ki, bir naməlum parametrdən asılıdır. Bu halda funksi-yasının maksimumunu aşağıdakı kimi tapmaq olar.



1) –törəməsini tapaq.



2) şərtindən *θ\** böhran nöqtəsini tapaq.



3) olduqda *θ\** maksimum nöqtəsidir.



Tapılmış *θ\** maksimum nöqtəsi naməlum *θ* parametrinin ən böyük həqiqətəox-şarlıq qiymətləndirməsi olaraq qəbul edilir

İndi isə fərz edək xi, kəsilməz *X*–təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası namə-lum *θ1* və *θ2* parametrlərindən asılıdır. Bu halda həqiqətəoxşarlıq funksiyası namə-lum *θ1* və *θ2* parametrlərinin funksiyası olacaqdır, yəni

*L=f(x1; θ1, θ2). f(x2; θ1, θ2)*

Bu halda naməlum parametlər üçün



tənliklər sisteminə çevrilir.

Puasson paylanmasının naməlum λ parametrinin λ\* nöqtəvi qiymətləndirməsini quraq. Bu halda həqiqətəoxşarlıq funksiyası



şəklində olar. Axırıncı bərabərlikdən



olduğunu alarıq. Həqiqətəoxşarlıq tənliklər sistemi



şəklinə düşər. Axırıncı tənlikdən isə olduğunu alırıq.



Beləliklə, Puasson paylanmasının λ parametrinin ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsulu ilə qurulmuş qiymətləndirilməsi seçmə ortadır.

Normal paylanmanın *θ* və σ2 naməlum parametrlərinin nöqtəvi qiymətləndiril-məsini tapaq.



Axırıncı bərabərliyin hər iki tərəfini loqarifmləsək



olduğunu yaza bilərik. Baxılan halda həqiqətəoxşarlıq tənliklər sistemi



sisteminə çevrilər. Tənliklər sistemini həll edərək



olduğunu alarıq.

Göründüyü kimi, normal paylanma parametrlərinin ən böyük həqiqətəoxşarlıq qiymətləndirmələri, ən kiçik kvadratlar və momentlər üsulları ilə tapılmış qiymət-ləndirmələrlə üst–üstə düşür.

**2. Ehtimalin nisbi tezliyə görə nöqtəvi qiymətləndirilməsi**

Tutaq ki, aparılan asılı olmayan sınaqlarda *A* hadisəsinin *p* baş vermə ehtimalı naməlumdur. Nisbi tezliyə əsasən naməlum *p* parametrinin nöqtəvi qiymətləndir-məsini tapmaq tələb edilir. Naməlum *p* ehtimalının nöqtəvi qiymətləndirilməsi olaraq



nisbi tezliyini götürək. Burada n–aparılan sınaqların, m isə *A* ha­disəsinin başvermə sayıdır. Elitimal nəzəriyyəsində sübut edilmişdir ki,

*Em=np və Dm=npq*

Burada *q=l–p* götürülmüşdür. Beləliklə,



və



olduğunu alırıq. *Ew=p* və olduğuna görə nisbi tezliyi naməlum *p* ehtimalının yerinidəyişməyən və əsaslı qiymətlən­dirməsidir.



**3.ETİBARLILIQ İNTERVALLARININ QURULMASI**

**3.1. Paylanma parametrlərinin etibarlılıq intervalı.**

**Etibarlılıq ehtimalı**

Tutaq ki, *X* baş yığımının *F(x,θ)* paylanma funksiyası naməlum *θ* parametrin-dən asılıdır. Yuxarıda bu parametrin seçmə xarakte­ristikalar vasitəsi ilə yerini dəyişməyən, əsaslı, effektiv və kafi mənada ən yaxşı qiymətləndirməsindən danı-şılmışdır. Məsələn, normal paylanmış baş yığımın naməlum riyazi gözləmə­sinin ən yaxşı qiymətləndirməsi seçmə ortadır. Beləliklə, naməlum riyazi gözləmə bir ədədlə–seçmə orta ilə qiymətləndirilir. Parametr üçün tapılmış təqribi qiymətlər bir ədəddən ibarət olduğu üçün onlara nöqtəvi qiymətləndirmələr deyilir. Nöqtəvi qiymətləndirmələr müəyyən təsadüfi kəmiyyətlərin xüsusi qiymətləridir və onlar qiymətləndirilməsi tələb edilən parametrlərin əsil qiymətlərindən xeyli fərqlənə bilərlər. Məhz bu səbəbə görə naməlum parametrlər üçün qiymətləndirmələrin dəqiqliyinin və etibarlığının öyrənilməsi riyazi statistikanın mühüm məsələlərindən biridir.

Parametrlər üçün tapılmış təqribi qiymətlərin dəqiqlik və etibar­lılıq məsələləri intervallı qiymətləndirmə üsulu ilə, yəni qiymətləndirmə (etibarlılıq) intervallarının qurulması vasitəsi ilə tədqiq edilir. Kiçik seçmələr üçün qiymətləndirmə interval-larının qurulması daha çox əhəmiyyət kəsb edir. Bu halda nöqtəvi qiymətləndirmə əhəmiyyətli dərəcədə təsadüfidir və ona görə də onun etibarlılığı kiçikdir.

Tutaq ki, axtarılan *θ* parametri üçün *θn(x1, x2,...,xn)* qiymətləndirilməsi tapılmışdır və *ε > 0* kifayət qədər kiçik ixtiyari həqiqi ədəddir. *θn* qiymətləndirmə-sinin *θ* parametrinə yaxın olmasını

*|θn-θ|<ε*

bərabərsizliyi vasitəsi ilə xarakterizə etmək olar. Aydındır ki, bu bərabərsizliyi ödəyən ε ədədi nə qədər kiçik olarsa *θn* qiymətləndirməsi də *θ* parametrinə bir o qədər yaxın olar. Bu isə o deməkdir ki, qiymətləndirmənin dəqiqliyini *|θn-θ|<ε* bərabərsizliyini ödəyən *ε* ədədi vasitəsi ilə ölçmək olar. Bununla yanaşı, qeyd edək ki, *θn* təsadüfi kəmiyyət olduğundan *|θn-θ| <ε* bərabərsizliyinin hökmən ödə-nildiyini demək olmaz. Onun ancaq müəyyən ehtimalla ödənilməsindən danışmaq olar.

**Tərif. 3.1.** *θ* parametrinin əsil qiymətini verilmiş *0 < α < 1* ehtimalı ilə öz daxi-lində saxlayan *(θn–ε, θn + ε)* intervalına qiymətləndirmə ( etibarlılıq ) intervalı deyilir.

Bu halda:

*P(θn - ε < θ<θn + ε )=α*

bərabərliyi ödənilir. *θn–ε, θn + ε* ədədlərinə etibarlılıq sərhədləri, *α* ədədinə isə etibarlılıq ehtimalı deyilir. Etibarlılıq intervalı tapılmış qiymətləndirmələrin dəqiqliyini, etibarlılıq ehtimalı isə qiymətləndirmələrin etibarlılığını xarakterizə edir.

Etibarlılıq intervalının daha ümumi tərifini də vermək olar. Uc nöqtələri *θn(1)* *(x1, x2, ...,xn)* və *θn(2)(x1, x2,...,xn)* təsadüfi kəmiyyətləri olan və *P(θn(1)<θ<θn(2))=α* münasibətini ödəyən (θn(1), θn(2)) intervalı *θ* parametrinin etibarlılıq intervalı adlanır. *P(θn – ε < θ<θn + ε ) = α* şərtinin ödənilməsi o deməkdir ki , hər birin-də həcmi *n* olan seçmə alınmış çoxlu sayda asılı olmayan sınaqlarda qurulmuş etibarlılıq intervallarından orta hesabla *α⋅100%*–i naməlum *θ* parametrinin əsil qiymətini öz daxilində saxlayır.

Bəzi məsələlərin həllində uc nöqtələri:

*P(θ <θ2)=α ; P(θ > θ1)=α*

şərtlərindən tapılan birtərəfli etibarlılıq intervallarından istifadə edilir. Bu intervallar uyğun olaraq sol tərəfli və sağ tərəfli interval adlanır.

Qiymətləndirmənin dəqiqliyini xarakterizə edən etibarlılıq inter­va­lının uzunlu-ğu seçmənin n həcmindən və α etibarlılıq ehtimalından asılıdır. Belə ki, seçmənin həcmi artdıqca etibarlılıq intervalının uzunluğu kiçilir, etibarlılıq ehtimalı vahidə yaxınlaşdıqca isə onun uzunluğu artır.

*1–α* ədədinə əhəmiyyətlilik səviyyəsi deyilir. Statistik tədqiqatlarda həll edilən məsələlərin əhəmiyyətindən və çıxarılan nəticələrin məsuliyyətindən asılı olaraq *1–α* əhəniyyətlilik səviyyəsinin *0,1; 0,05* və *0,01* qiymətlərindən istifadə edilir. İtisadi tədqiqatlarda isə əhəniyyətlilik səviyyəsinin *0,01* və *0,05* qiymətlərindən istifadə edilir

Əhəmiyyətlilik səviyyəsinin və beləliklə etibarlılıq ehtimalının seçilməsində riayət edilməsi vacib olan prinsipləri konkret misal üzərində izah edək. Etibarlılıq ehtimalının seçilməsi riyazi məsələ deyil və bilavasitə həll edilən problemlərin məzmununa görə təyin edilir.

Tutaq ki, iki müəssisədə keyfiyyətli məhsulun buraxılma ehtimali *P=α=0,99* –a bərabərdir. Deməli, keyfiyyətsiz məhsulun buraxılma ehtimalı *1–α = 0,01*–dir. Riyazi nöqteyi nəzərdən, yəni məlumatın xarakterilə maraqlanmadan, *α* ehtimalı-nın kiçik və ya böyük olduğunu müəyyən etmək olarmı?

Tutaq ki, müəssisələrdən biri elektrik lampası, digəri isə paraşüt istehsal edir. Qəbul edək ki yüz lampadan biri zaydır. Lampaların bir faizinin atılması, texnoloji prosesin yenidən qurulmasına nisbətən ucuz başa gələrsə bununla barışmaq olar. Ancaq yüz paraşütdən birinin zay olması çox ciddi və arzuolunmaz nəticələrə gətirib çıxarır. Beləliklə, birinci halda zay olma ehtimalı qəbul edilən, ikinci halda isə qəbul edilməzdir. Ona görə də etibarlılıq ehtimalı məsələnin məzmununa əsasən müəyyən edilməlidir.

**3.2. Orta kvadratik kənarlaşma (σ) məlum olduqda naməlum**

**riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervalının qurulması**

Tutaq ki, normal qanunla paylanmış yığımın (və ya *X* təsadüfi kəmiyyətinin) dispersiyası məlum, *m* riyazi gözləməsi isə məlum deyildir. Naməlum *m* parametri-nin *x1, x2,..., xn* seçməsinin orta qiyməti vasitəsi ilə qiymətləndirməsinin etibarlılıq intervalını tapmaq lazımdır. Bunun üçün, seçməni təşkil edən *x1,x2,...,xn* ədədlərini asılı olmayan və eyni normal qanunla paylanmış *X1, X2 ,..., Xn* təsadüfi kəmiyyətlərinin qiymətləri kimi qəbul edək. Onda,



,



olar. Ehtimal nəzəriyyəsinə görə



olar. Burada *x* əvəzinə ‾*x* götürüldükdə *σ2* əvəzinə yazılmalıdır və nəticədə:



bərabərliyi,



əvəzləməsini apardıqda isə



bərabərliyi alınır. Axırıncı bərabərlikdə *2F(tα)=α,* qəbul etsək *m* parametrinin *α* etibarlılıq ehtimalına uyğun olan etibarlılıq intervalının



intervalı olduğunu alarıq.

Beləliklə, *X* baş yığımının *σ* orta kvadratik kənarlaşması məlum olduqda, baş yığımın naməlum riyazi gözləməsinin *α* etibarlılıq ehtimalına uyğun olan etibar-lılıq intervalının qurulması üçün aşağıdakı qaydanı alarıq:

**Qayda 1.** Normal paylanmış baş yığımın *σ* orta kvadratik kənarlaşması məlum olduqda ‾*x* seçmə ortasına görə onun naməlum m riyazi gözləməsinin etibarlılıq intervalı α etibarlılıq ehtimalı ilə



kimi təyin edilir.

**3.3. Orta kvadratik kənarlaşma σ məlum olmadıqda naməlum**

**riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervalının qurulması**

Baş yığımın orta kvadratik kənarlaşması məlum olmadıqda yuxarıda alınmış qiymətləndirmələrdən istifadə etmək olmaz. Bu halda ‾*x* seçmə orta və düzəldilmiş (təshihli) orta kvadratik kənarlaşma vasitəsilə təyin edilmiş təsadüfi kəmiyyətinə baxaq . Məlumdur ki, *T* sərbəstlik dərəcəsi *k=n–1* olan Styudent paylanmasına malikdir.



Styudent paylanmasının sıxlıq funksiyasının cüt funnksiya olduğunu nəzərə alsaq



bərabərliyini alırıq.

Buradan,



və ya



münasibəti alınır.

Bu münasibəti



bərabərliyindən təyin olunan *tα* ədədi vasitəsi ilə və yaxud kimi yazmaq olar.



Beləliklə, baş yığımın *σ2* dispersiyası məlum olmadıqda onun naməlum *m* riya-zi gözləməsinin *α* etibarlılıq intervalına uyğun olan etibarlılıq intervalının qurul-ması üçün aşağıdakı qaydanı alarıq.

***Qayda 2.*** Normal paylanmış baş yığımın orta kvadratik meyli məlum olmadıqda ‾*x* seçmə ortasına görə onun naməlum m riyazi gözləməsinin etibarlılıq intervalı *α* etibarlılıq ehtimalı ilə



kimi təyin edilir.

**4. Hadisənin naməlum *p* ehtimalı üçün etibarlılıq**

**intervalının qurulması**

Tutaq ki, aparılan asılı olmayan sınaqlarda *A* hadisəsi müşahidə edilir və onun *p*–başvermə ehtimalı naməlumdur. Nisbi tezliyə görə naməlum *p* ehtimalı üçün etibarlılıq intervalı quraq. Məlumdur ki, *X∈N(,σ2)* olduqda münasibəti doğrudur. *n* kifayət qədər böyük olduqda nisbi tezlik asimptotik nor-mal kəmiyyətdir və



,.



münasibətində *X* və –nı uyğun olaraq *w* və *p* ilə əvəz etsək təqribi bərabərsizliyini alarıq. işarə edək. qəbul edək, . Onda axırıncı təqribi bərabərliyi şəklində yaza bilərik. Beləliklə, *α* ehtimalı ilə



bərabərsizliyi ödənilir.

Naməlum *p* parametri üçün alınmış qiymətləndirmənin iki çatışmamazlığı var-dır:

1) Bu qiymətləndirmə *n*–in böyük qiymətlərində doğrudur, bu isə qeyri mü-əyyən anlayışdır;

2) (3.7) bərabərsizliyinin sağ tərəfində naməlum *p* parametrindən asılı kə-miyyət durur.

*n*–in böyük qiymətlərində ikinci çatışmamazlıq *p–n*-i *w* ilə əvəz etməklə ara-dan qaldırıla bilər.

Fərz edək ki, *w>p.* Onda

.



olar.

Bərabərsizliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldək *(w>p).* Onda əvvəlki bəra-bərsizliyə ekvivalent olan



bərabərsizliyini alarıq. Sol tərəfdəki kvadrat üçhədlinin diskriminantı müsbətdir.

Deməli, naməlum *p* ehtimalı üçün etibarlılıq intervalını *p1<p<p2* şəklində yaz-maq olar.

Burada



Eyni nəticəyə *W>p* olduqda da gəlmək olar.

Beləliklə, axtarılan etibarlılıq intervalı

*p1 < p < p2*

şəklində olar.

1. **Müxti əlif növ seçmələr üçün seçmə xətanın tapılması.**

***Tipik seçim:*** Tutaq ki, naməlum riyazi gözləməsini qiymətləndirmək üçün baş yığım tipik qruplara ayrılmışdır. Tipik qrupların sayını *s* ilə işarə edək. Fərz edək ki, *i*–ci qrupdan həcmi *ni, i=1,2,..,s* olan seçmə alınmışdır və . Baş yığımın *i-*ci qrupundan təsadüfi qaydada seçilmiş *ni* sayda element seçmədə *i-*ci qrupu təşkil edir. Seçmə qrupların orta qiymətlərini və dispersiyalarını uyğun olaraq ‾*Xi* və *‾σi2* ilə, tipik qruplarınkını isə və ilə işarə edək.



Məlumdur ki, *i*–ci seçmə qrupun ‾*Xi* ortası müvafiq tipik qrupun ortası üçün yerinidəyişməyən qiymətləndirmədir, yəni , *i=1, 2,…,s*. *s* sayda seçmə qrupdan ibarət olan seçmənin orta kəmiyyətini ‾*XS*, dispersiyanı isə ‾ ilə işarə edək.



Orta qiymət haqqında teoremə əsasən



olduğunu yaza bilərik. Onda



olar. Axırıncı bərabərlikdə *ni*–i müxtəlif üsullarla təyin etmək olar. Məlumdur ki, proporsional tipik seçmələr üçün

, *i=1,2,…s*



Burada, *Ni*– *i*–ci tipik qrupun həcmidir və .



Beləliklə,



Orta qiymət haqqında teoremə görə



olduğuna yaza bilərik.

Deməli, . Bu isə ‾*XS*–in yerinidəyişməyən qiymətləndirmə olduğunu göstərir. Hər bir seçmə qrupa *ni*–həcmli təkrar seçmə kimi baxsaq



, *i=1, 2,…, s*



olduğunu alarıq.

Naməlum parametri üçün etibarlılıq intervalını qurmaq üçün –i hesabla-yaq:



Axırıncı bərabərliyin sağ tərəfi seçmə qruplar üçün orta qrup daxili dispersiya-dır.

Beləliklə,



münasibətindən istifadə etsək naməlum parametri üçün *α* etibarlığı ilə



etibarlılıq intervalını alarıq.

Təkrar olmayan seçmələrə baxıldıqda etibarlılıq intervalını qurmaq üçün axırın-cı bərabərsizlikdə ‾*x*–in orta xətasını ilə əvəz etmək kifayətdir.



Əlamətin variasiyasına mütənasib seçmələrdə orta xəta aşağıdakı kimi hesabla-nılır. Təkrar seçmələr üçün



Təkrar olmayan seçmələr üçün:



Burada, *σi2* – *i=1,2,…,s* qrup dispersiyasıdır.

Seçmə qrupların həcmi



kimi təyin edildikdə aparılmış tipik seçməyə optimal seçmə deyilir. Optimal seçmənin dispersiyası minimallıq xassəsinə malikdir. Baş yığımdan optimal tipik seçmə aparmaq üçün qrup dispersiyaları məlum olmalıdırlar.



Qeyd edək ki, tipik seçmə əlamətin hissəsini qiymətləndirmək üçün də istifadə edilə bilər.

*pi* ilə *i*–ci seçmə qrupda əlamətə malik olanların hissəsini işarə etsək.



olar. Burada, ‾*p* *s* sayda seçmə qrupdan ibarət olan seçmənin orta kəmiyyətidir. Bu halda baş yığımda əlamətin *p* hissəsi üçün etibarlılıq intervalı



Təkrar olmayan seçmələr üçün uyğun interval



şəklində olar.

**Mexaniki seçim:** Bu üsulda *n1=n2=…=ns* olduğundan olar. Bu halda etibarlılıq intervalı tipik seçmədə olduğu kimi qurulur. Mexaniki seçmədə hər bir seçmə qrupda bir element olduğu üçün orta qrup daxili dispersiyanı həcmi *n=s* olan təsadüfi seçmənin dispersiyası ilə əvəz etmək lazımdır.



**Seriyali seçim:** Tutaq ki, *X* baş yığımının naməlum riyazi gözləməsini qiymətləndirmək üçün seriyalı seçmə aparılmışdır. Fərz edək ki, baş yığım həcmləri eyni ədədinə bərabər olan *s* sayda seriyalara ayrılmışdır. *s* sayda seriyadan təsadüfi təkrar seçmə üsulu ilə *k* sayda seriya seçək. Onda həcmi olan təsadüfi seçmə alırıq. Seriyaların seçmə xarakteristikalarını ‾*Xi* və *σi2 , i=1,2,…,s* ilə işarə edək. *s* sayda seriyadan k saydası təsadüfi qaydada seçildiyinə görə *1*–ci seçmənin nəticəsinə , ,…, qiymətlərini eyni ehtimalı ilə alan *X\*i* təsadüfi kəmiyyəti kimi baxmaq olar.



Orta qiymət haqqında teoremə görə



olduğunu deyə bilərik.

Digər tərəfdən



Bu halda seçmə ortanı aşağıdakı kimi göstərmək olar.



Onda



olar. Deməli, ‾*Xs* baş yığımın naməlum riyazi gözləməsinin yerinidəyişməyən qiymətləndirməsidir. Onun dispersiyasını hesablayaq:



Beləliklə, olduğunu alarıq.



olduğundan



olar. Beləliklə, *α* etibarlığı ilə naməlum riyazi gözləməsi üçün



etibarlılıq intervalını alarıq.

Təkrar olmayan seçmələr üçün etibarlılıq intervalı



şəklində olar.

**6. Seçmənin zəruri həcminin hesablanması**

Baş yığımın parametrlərini qiymətləndirmək üçün seçmənin təş­kili üsulu əsaslandırıldıqdan sonra, seçmə xətanın *1–α* etibarlılıq ehtimalı ilə arzu edilən dəqiqliyini təmin etmək məqsədi ilə seçmənin zəruri həcmini müəyyən etmək lazımdır.

Seçmə ortaya əsasən naməlum riyazi gözləmənin qiymətləndiril­məsində təkrar və təkrar olmayan seçmələrin zəruri həcminin hesab­lanması məsələsinə baxaq.

Əvvəlcə təkrar seçmənin həcmini hesablayaq. Orta kvadratik kənarlaşma mə-lum olduğu halda naməlum riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervalı



şəklində olar. Etibarlılıq intervalının uzunluğu –ə bərabərdir. İntervalın uzunluğu qiymətləndirilən parametrin dəqiqliyini müəyyən edir. işarə edək. Onda verilmiş *Δ* dəqiqliyini və *α* etibarlılıq ehtimalına görə tapılmış *tα*–ya görə seçmənin *n* zəruri həcmini hesablamaq olar. Doğrudan da,



münasibətindən



olduğunu alarıq.

Deməli, .



İndi isə orta kvadratik kənarlaşma məlum olmayan hala baxaq.Verilmiş *α* etibarlılıq ehtimalı ilə aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir.



Orta kvadratik kənarlaşma məlum olan halda olduğu kimi, seçmənin zəruri həcminin hesablanması üçün



düsturunu alarıq. Burada *tα,n*– *x* və *n* verilənlərinə görə xüsusi cədvəldən tapılır.

*s2* isə həcmi *n* olan seçməyə görə hesablanmış düzəldilmiş dispersiyadır.

İndi isə fərz edək ki, seçmə orta təkrar olmayan seçməyə əsasən hesablanmışdır.

Onda



olar. Baş yığımın dispersiyası məlum olduqda



Burada *N* baş yığımın həcmidir. Bu halda seçmə xəta üçün düsturunu alarıq. Axırıncı münasibətdən seçmənin zəruri həcmini hesablamaq üçün



düsturunu alarıq.



olduğuna görə, *N→∞* olduqda qəbul etmək olar.



Tutaq ki, verilmiş *α* etibarlığı ilə uzunluğu *2Δ* olan etibarlılıq intervalı qurulmuşdur. Yuxarıda deyildiyi kimi, təkrar seçmələr üçün seçmənin zəruri sayı



təkrar olmayan seçmə üçün isə



düsturu ilə hesablanır. *n*–in ifadəsini aşağıdakı kimi çevirək:



olduğu üçün



olduğunu alırıq. *n*–*1> 0* olduğu üçün olduğunu alırıq.



Beləliklə, təkrar seçmənin həcmi təkrar olmayan seçmənin həcmindən kiçik deyil.

Təcrübədə tez–tez təsadüf edilən hallar üçün seçmənin zəruri sayının hesablanması ifadəsini aşağıdakı cədvəldə verək.

**Cədvəl 1.**

**Müxtəlif növ seçmələr üçün seçmənin zəruri sayının hesablanması**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Seçmənin növü | Seçmənin növü | |
| Təkrar | Təkrar olmayan |
| Təsadüfi və mexa­niki |  |  |
| Tipik |  |  |
| Seriyalı |  |  |

**MÖVZU 12.STATISTIK HIPOTEZLƏRIN YOXLANMASI.**

**P L A N**

**1.Statistik hipotezlər haqqında ümumi anlayış**

**2.Statistik hipotezlərin yoxlanılmasının əsas anlayışları.**

**2.1.Statistik hipotezlər. Əsas və altenativ, sadə və mürəkkəb hipotezlər.**

**2.2.Statistik kriteriyalar.Kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti**

**2.3. Kriteryanın böhran və qəbul oblastları. Böhran nöqtələri və onların**

**təyini.**

**2.4.Birinci və ikinci növ səhvlər. Kriteriyanın gücü.**

**3. Statistik hipotezlərin yoxlanılmasının ümumi sxemi**

**4. Əlamətin hissəsi haqqında hipotezlərin yoxlanması.**

**4.1. Әlamətin hissәsinin standartla muqayisәsi.**

**4.2. İki yığımda əlamətin hissələri haqqında hipotezin yoxlanılması.**

**5. Orta qiymәtlər haqqında hipotezlərin yoxlanılması.**

**5.1. Seçmə ortanın hipotetik orta ilə müqayisəsi haqqında hipotezin**

**yoxlanması**

**5.2. Orta qiymәtlərin müqayisәsi haqqında hipotezin yoxlanılması**

**5.2.1.Dispersiyalar məlum olan hal.Laplas kriteriyası.**

**5.2.2.Dispersiyalar məlum olmayan hal.Styudent kriteriası**

**6.Asılı seçmələr haqqında hipotezlərin yoxlanılması**

**7. Dispersiyaların bərabərliyi haqqında hipotezin yoxlanılması. Fişer- Snedekor kriteriyası**

**8.Baş yığımın paylanma funksiyasının növu haqqında hipotezin yoxlanılmas.Pirson kriteriyası.**

Ə D Ə B İ Y Y A T

1.S.Ö.Ömərov, N.Ə.cavadov.Riyazi və tətbiqi statisyika.Bakı, Azərnəşr, 2007.

2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çaşıoölu, 2006.

**Mövzu 12.Statistik hipotezlərin yoxlanması.**

**1.Statistik hipotezlər haqqında ümumi anlayış.** Hipotez termini yunancadan (hypothesis) tərcümədə fərziyyə, güman, təxmin vә ya ehtimal mənasını bildirir.

Hipotezlər adәtәn müәyyәn faktların müşahidəsinə əsasən irəli sürülür və həmin faktların ümu­milәş­diril­mәsi cәhdidir.

İrәli sürülәn hipotezin doğruluğunun təsdiqi və yaxud onun rədd edilməsi adətən hipotezin irәli sürülməsindən dərhal sonra baş vermir. Çox vaxt hipotezin yaranmasından onun sübutuna qədər kifayət qәdәr uzun zaman keçir. Mәsәlən, kainatın mәnşəyi haqqında elmi hipotez indiyә kimi yoxlanmamışdır. Kopernikin günәş sistemi haqqında tәlimi isә yarandığı dövrdәn keçәn üç yüz il ərzində yalnız hipotez olaraq qalmışdır. Yalnız XIX əsrin ortalarında Leverye və Hallenin cәhd-ləri sayәsində bu hipotezin doğruluğu sübut olunmuşdur. Bәzәn hipotezin yox-lanılması kiçik zaman kəsiyində mümkün olur. Mәsәlәn, 1846–cı ildә mәhşur fransız astronomu Leverye Uran planetinin tәdqiqinә әsaslanaraq namәlum planetin mövcud olması haqqında hipotez irәli sürmüşdür.O, Neptun adlandırılan bu planetin orbitini hesablayaraq onun yerini göstәrdi. Elә hәmin il Leveryenin hipotezi təsdiq edildi. Bu planeti Alman astranomu Halle kәşf etdi.

Deyilәnləri nəzәrә alaraq hipotez anlayışına tәrif verәk. Sözün geniş mәnasında hipotez dedikdә, müәyyən hadisəlәr toplusunu izah edәn inkişaf qanunauy­ğunluqları haqqında elmi cәhәtdәn әsaslandırılmış güman (təxmin) başa düşülür. Bunu isә yoxlamaq vә sübut etmək tələb edilir.

İrəli sürülәn hipotezin yoxlanılması tədqiqatın məqsədlərinə uyğun olaraq xüsusi tәşkil edilmiş elmi müşahidə vә ya eksperiment nəticəsində əldə edilmiş faktların kömәyi ilә mümkün bilәr. Bunun üçün aparılmış eksperimentin vә ya tәdqiqatın nәticәləri haqqında kütlәvi məlumatlara malik olmaq lazımdır. Hәmin kütlәvi məlumatların kəmiyyətcə ifadәsi təsadüfi kәmiyyәtlәrlә xarakterizә edilir.

Qeyri–müәyyәnlik şәraitindә müşahidə edilәn tәsadüfi kәmiyyətlərә görə, nəzәri gümanın doğruluğunun yoxlanması statistik hipotezlərin kömәyi ilә aparıla bilәr. Tәsadüfi kәmiyyәtlərin vә ya baş yığımların paylanma qanunları haqqında irəli sürülən təklif statistik hipotez adlanır.

Statistik hipotez elmi hipotezin xüsusi halıdır. O, elmi hipotez anlayışına nisbә-tәn mәhdud anlayışdır.

Belә ki, Marsda canlı materiyanın mövçud olması hipotezi elmi hipotezdir. Lakin statistik deyil. Çünki hәr hansı statistik yığıma heç bir aidiyyәti yoxdur. Eyni zamanda "Bitkiçilik məhsulları istehsalı ilә mәşğul olan fermer tәsәrrüfatlarında rentabellik səviyyәsi heyvandarlıq məhsulları istehsal edən fermer tәsәrrüfatlarına nisbәtәn yüksəkdir” hipotezi statistikdir. Ona görə ki, bu halda orta rentabellik sәviyyәsinә tәsәrrufatlar yığımına nәzәrәn tәsadüfi kәmiyyәt kimi baxılır vә o, paylanmanın parametri kimi qәbul edilir.

"Azәrbaycan Respublikasında әhalinin әmәk haqqının hәcminә görə paylanması loqarifmik normal qanuna tabedir" hipotezi dә hәmçinin statistikdir.

Təcrübədә tez–tez sınaqların, müşahidələrin vә s. nәtiçәlərinә әsasәn konkret kütlәvi hadisәnin xarakteristikaları haqqında müxtәlif hipotezləri yoxlamaq tәlәb olunur. Aşağıdakı mәsәlәləri nәzәrdәn keçirәk.

Mәsәlә 1. Heyvanların yoluxması yoluxanların hissәsi ilә ölçülür vә adi şәraitdә müәyyәn *p0* sәviyyәsinә malik olur. Fәrz edәk ki, peyvәnd nәticәsində heyvanların yoluxması *p1<p0* sәviyyәsinә qәdәr azalır. Heyvan­ların yoluxmasının müayinәsinә әsasәn bunun doğru olub–olmamasını yoxlamaq tәlәb olunur.

Mәsәlә 2. Mәhsuldarlığı 0 olan buğda növünü mәhsuldarlığı1 olan buğda növü ilә әvәz edirlәr. İkinci növ buğdanı rayonlaşdırdıqda, onun birinci növə nis-bətәn daha mәhsuldar olduğunu yoxlamaq tәlәb edilir.



Statistik hipotezlərin yoxlanılması metodları təcrübədә geniş tәtbiq edilir. Mәsәlәn, müәssisәlərin әmәk məhsuldarlığına görə planı yerinә yetir­mә­lərinә nәzarәt, kәnd tәsәrrüfatı bitkilərinin mәhsuldarlıqlarının müqa­yisәsi, istehsal edilәn mәhsulun keyfiyyәti vә s. statistik hipotezlərin yoxlanılmasına әsaslanır.

Yuxarıda göstәrilәn mәsәlәlәrdә hipotezlərin şifahi tәsvir forması verilmişdir. Riyazi statistikada isә şifahi tәsvir formasını riyazi formaya çevirmәk lazımdır. Şifahi tәsvir formasının riyazi formaya çevrilmәsini birinçi mәsәlәnin üzәrindә aydınlaşdıraq.

Mәlumdur ki, bitkilərin mәhsuldarlığı müxtәlif amillərdәn (torpağın keyfiy-yәtindən, hektara verilәn gübrәnin miqdarından, orta illik yağıntı miqdarından vә s.) asılıdır. Ona görә dә məhsuldarlığa normal tәsadüfi kәmiyyәt kimi baxmaq olar. İkinci məsәlәdә 1–ci növ buğdanın mәhsuldarlığına (,) parametrli, 2–ci növ buğdanın məhsuldarlığına isә (,) parametrli tәsadüfi kəmiyyət kimi baxmaq olar. Belәliklә, iki fərziyyə alırıq:



1) , yәni orta qiymətləri bәrabәr olan iki müxtәlif normal paylanmaya malik tәsadüfi kәmiyyət vardır (hәr iki buğda növünün mәhsuldarlığı eynidir);



2) , 2–ci tәsadüfi kәmiyyәtin orta qiymәti birincidәn böyükdür (ikinci növ buğda birinciyә nisbәtәn daha mәhsuldardır).



Yuxarıda deyilәnlәrә әsasәn statistik hipotezin yoxlanılması mәsәlәsinin riyazi qoyuluşuna aşağıdakı mәsәlә kimi baxa bilərik.

Təqdim edilәn baş yığımın (və ya tәsadüfi kәmiyyәtinin) paylanma para-metrləri bәzәn mәlum olmur. Lakin aparılan müşahidəlәrә vә başqa mәlumatlara әsasәn bu paylanmanın parametrinin müәyyәn ədədinə bәrabәr olması, – dan böyük vә ya kiçik qiymәtlәr alması vә s. haqqında müәyyәn hipotezlәr söylәmәk olar. Ola da bilәr ki, baş yığımın paylanma funksiyasının növü müәyyәn deyil, ancaq aparılan müşahidəlәrә әsasәn onun paylanma funksiyasının növü haqqında müəyyən hipotezlər söylәmәk mümkün olur.



**Tərif 1.** Baş yığımın paylanma parametrləri vә yaxud paylanma funksiyasının növü haqqında hipotezlərə statistik hipotezlər deyilir.

Mәsәlәn, " baş yığımı normal qanunla paylanmışdır", "Paylanmanın para-metri qiymәtinә bәrabәrdir: , " vә baş yığımlarının dispersiyaları müxtәlifdir” və s. statistik hipotezlərdir.



**2.Statistik hipotezlərin yoxlanılmasının əsas anlayışları.**

**2.1. Statistik hipotezlər. Əsas və altenativ, sadə və mürəkkəb hipotezlər.**

Statistik hipotezlər empirik nəticәlәr vә ya seçmә yığım vasitәsilә yoxlanılır. Bu məqsədlә, müәyyәn bir qayda ilә sınağın *x1, x2, ......, xn* nəticələrinin baş yığımın paylanma parametrləri və yaxud onun paylanma funksiyasının növü haqqında hipotez ilə uzlaşdığı və yaxud onlar arasındakı fərqin təsadüfi seçim mexanizmi ilә bağlı olan tәsadüfi xəta ilə əlaqədar olduğu yoxlanılır. Həmin qaydaya, yәni irəli sürülən fərziyyənin qәbul va ya rədd edilməsini göstərən qaydaya uzlaşma kriteriyası deyilir.

Statistik hipotezlərin yoxlanılmasının əsas anlayışları ilә tanış olaq.

İrәli sürülәn hәr bir başlanğıc hipotezə әsas (sıfırıncı) hipotez deyilir. Әsas hipotez kimi işarә edilir.



Әsas hipotezə zidd olan hәr bir hipotezə alternativ (rәqib) hipotez deyilir. Alternativ hipotezi kimi işarə edilir.



Hipotezləri riyazi olaraq tәsvir etmәk üçün hipotezin işarәsindən sonra iki nöqtə (:) qoyulur və ondan sonra hipotezin mәzmunu yazılır. Mәsәlәn, normal paylanmış baş yığımın riyazi gözləməsi әdәdinә bәra­bәrdir әsas hipotezi kimi, “–baş yığımı normal paylan­maya malik deyil” alternativ hipotezi isə : “–normal paylanmaya malik deyil” kimi yazılır.



Hipotezlər sadә vә mürәkkәb olur.

Seçmә yığımın paylanmasını birqiymətli olaraq tәyin edәn hipotezə sadә deyi-lir.

Mәsәlən, 1–ci mәsәlədәki hipotezlər sadәdir. Çünki burada 2 hal mümkündür: *p=0,1* peyvәnd edilmәyib; *p=0,05* peyvәnd edilmişdir. Göründüyü kimi, paylanma parametrinin konkret әdәdә bәrabәr olması haqqında hipotez yoxlanılır, yәni tәsadüfi kәmiyyәtin paylanması tamamilә müәyyәndir.

Sadә olmayan hipotezlərə mürәkkәb hipotezlәr deyilir. Mürәkkәb hipotezlәrdә parametrin ehtimal edilәn qiymәtlәr çoxluğu verilir. 2–ci mәsәlәdәki alternativ hipotezi şәklindә yaza bilә­rik. Bu mürәkkәb hipotezdir. Çünki, parametri –dan böyük istәnilәn qiymәti ala bilәr. Mürәkkәb hipotezlər sonlu vә ya sonsuz sayda sadә hipotezlәrdәn ibarәtdir. Mәsәlәn, hipotezi, sonsuz sayda sadә ( –dan böyük istәnilәn әdәddir) hipotezlərindәn ibarәtdir.



**2.2.Statistik kriteriyalar.Kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti.**

Seçmә mәlumatların yoxlanılan hipotez ilә uzlaşması haqqında mülahizә tәdqi-qat üçün götürülmüş kriteriyaya görə söylәnilir. Belә ki, seçilmiş kriteriyaya görə әsas hipotez qәbul edilir vә yaxud rәdd edilir. Başqa sözlə kriterya əsas hipotezin qəbul və ya rədd edilməsi qaydasıdır. Adәtәn kriteriya olaraq seçməyə əsasən təyin edilən statistik xarakteristika götürülür. Belәliklә, kriteriya paylanma funksiyası dəqiq və ya təqribi olaraq mәlum olan tәsadüfi kәmiyyәtdir.

İki dispersiyanın bәrabәrliyi vә yaxud iki orta qiymәtin bərabәrliyi haqqında әsas hipotezin doğruluğunu yoxlamaq üçün kriteriyanı uyğun olaraq dispersiya-ların nisbәti vә seçmә ortaların fәrqi kimi götürə bilərik

Əsas hipotezi yoxlamq üçün kriteriyanı müxtəlif üsullarla təyin etmək olar. Mәsәlәn, baş yığımın riyazi gözlәmәsinin verilmiş әdәdinә bәrabәr olması haq-qında əsas hipotezi yoxlamaq lazımdır. baş yığımından həcmi n olan seçməsini götürək. Əsas hipotezin doğruluğunu yoxlamaq üçün kriteriya olaraq seçmə ortasını, fәrqini vә yaxud normallaşdırılmış fərqini götürmək olar. Belə təyin olunan təsadüfü kəmiyyətlər vasitəsilə mxtəlif uzlaşma kriteriyaları alınır.



Seçilmiş ktiteriyanın seçməyə əsasən hesablanmış qiymətinə onun müşahidə edilmiş qiyməti deyilir.Məsələn tutaq ki, baş yığımının orta kvadratik meyli məlumdur. əsas hipotezinin doğruluğunu yoxlamaq üçün həcmi *n=100* olan seçməyə əsasən seçmə ortası tapılmışdır. Onda kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti



olar.

**2.3. Kriteryanın böhran və qəbul oblastları. Böhran nöqtələri**

**və onların təyini..**

Tutaq ki, әsas hipotezi yoxlamaq üçün kriteriyası seçilmişdir. Seçilmiş kriteriyaya uyğun olaraq təsadüfü kəmiyyətin qiymətlər oblastı kəsişməyən iki oblasta ayrılır: böhran və hipotezin qəbul olunma ( yol verilən) oblastına.



Kriteriyanin qiymәtlәr çoxluğunun elә alt çoxluğuna böhran oblastı deyilir ki, kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti bu oblasta daxil olduqda әsas hipotez rәdd edilir. Әksinә kriteriyanın qәbul oblastı onun qiymәtlәr çoxluğunun elә alt çoxluğuna deyilir ki, kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti bu oblasta daxil olduqda әsas hipotez qәbul edilir.



Kriteriya bir ölçülü təsadüfi kəmiyyət olduğu üçün onun qiymətlər oblastı müəyyən intervala daxildir.Ona görə də böhran və kriteriyanın yol verilə bilən qiymətlər oblastları da müəyyən intervallardır. Deməli, onları bir–birindən ayıran nöqtələr vardır.

Kriteriyanın böhran oblastını onun qәbul oblastından ayıran nöqtәlәrә böhran nöqtәləri deyilir.

Böhran oblastları birtərəfli ( sol və sağ tərəfli) və ikitərəfli oblastlara ayrılır.

, bərabərsizliyi ilə təyin edilən oblasta sağ tərəfli , , bərabərsizliyi ilə təyin edilən oblasta sol tərəfli və () –bərabər-sizlikləri ilə təyin edilən oblasta ikitərəfli böhran oblastı deyilir.



Xüsusi halda ikitərəfli simmetrik böhran oblastı bərabərsizliyi ilə təyin edilir.



İndi isә böhran nöqtәlərinin və belәliklә, böhran oblastının tәyini ilә tanış olaq.

Böhran nöqtәlərinin tәyini ehtimalı kifayәt qәdәr kiçik olan hadisәlərin praktiki cәhәtdәn mümkün olmaması prinsipinә әsaslanır. hadisəsinin ehtimalı kifayət qədər kiçik olduğu üçün o, praktiki olaraq mümkün olmayan hadisədir. Onun başverməsini, yəni olmasını əsas hipotezin yalan olması ilə izah etmək olar. Bu halda əsas hipotez rədd edilir. Beləliklə, şərti kriteriyanın elə qiymətlərini müəyyən edir ki, bu qiymətlərdə əsas hipotez rədd edilir, onlar isə böhran oblastını təşkil edirlər. Ona görə də böhran nöqtəsini tapmaq üçün əhəmiyyətlilik sәviyyәsi adlanan kifayәt qәdәr kiçik α әdәdi götürülür və böhran nöqtəsi əsas hipotezin doğruluğu şərtində şәrtindәn tapılır.



Sağtərəfli böhran oblastı qurmaq üçün əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın bu oblasta düşməsi ehtimalının əhəmiyyətlilk səviyyəsinə bərabər olması şərtindən istifadə edilir.



Aydındır ki,



Buradan



və yaxud



Beləliklə, sağtərəfli böhran nöqtәsi bәrabәrliyindən tapılır.



Sağtərəfli böhran oblastı , kriteriyanın qəbul oblastı isə bəra-bərsizliyi ilə təyin edilir.



İkitərəfli böhran oblastı qurmaq üçün əsas hipotezin doğruluğu şərtində krite-riyanın bu oblasta düşməsi ehtimalının əhəmiyyətlilk səviyyəsinə bərabər olması şərtindən istifadə edilir.



–normal təsadüfü təsadüfü kəmiyyət olduğu üçün onun paylanması sıfra nəzərən simmetrikdir. Onda böhran nöqtələri də sıfra nəzərən simmetrikdirlər.



Belәliklә, ikitərəfli böhran oblastını və kriteriyanın qəbul oblastını qurmaq üçün sağtərəfli böhran nöqtəsini tapmaq kifayətdir. Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki,



–in paylanması sıfra nəzərən simmetrik olduğu üçün onun intevalına düşməsi hadisəsinin ehtimalı olar. Onda ehtimalların toplanması qanununa görə



Deməli ,



Beləliklə,



İkitərəfli böhran oblastı , kriteriyanın qəbul oblastı isə bəra-bərsizliyi ilə təyin edilir.



Soltərəfli böhran nöqtəsi şərtindən tapılan sağtərəfli böhran nöqtəsinə simmetrikdir. Soltərəfli böhran nöqtəsini tapmaq üçün әvvәlcә bәrabәrliyindәn tapılır və soltərəfli böhran nöqtәsi – götürülür.



Solərəfli böhran oblastı , kriteriyanın qəbul oblastı isə bərabər-sizliyi ilə təyin edilir.



Hər bir kriteriyanın böhran nöqtələri cədvəli işlənib hazırlanmışdır.

Böhran nöqtəsi tapıldıqdan sonra kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti hesablanır. olarsa, onda әsas hipotezi rәdd edilır. Әks halda onu rәdd etmәyә heç bir әsas yoxdur.



**2.4.Birinci və ikinci növ səhvlər. Kriteriyanın gücü.**

Təsadüfi seçmə sonlu olduğundan və real vəziyyəti tam əks etdirə bilmədiyin-dən statistik hipotezin onun vasitəsilə yoxlanılması zamanı səhv qərar qəbul olun-ması istisna edilmir.Əlavə seçmə ola bilsin ki, “uğurlu” olmasın və onun əsasında əldə olunacaq məlumat yalan olsun. Bu xüsusiyyət statistik yoxlamanın əhəmiy-yətini azaltmır, əksinə, hipotezlərin statistik yoxlanması imkan verir ki, səhv qərar-ın qəbul olunması ehtimalını hesablamaq mümkün olsun və bu ehtimal nə qədər kiçik olsa, onda qurulan kriteriya səhvə yol verməni azaldır.

Yuxarıda deyilәnlәrdәn aydın olur ki, hipotezlərin yoxlanılması müәyyәn ehtimalla sәhv qәrarın qəbul edilməsi ilə әlaqәdardır. Statistik hipotezlər yoxla-nılan zaman iki növ sәhv buraxıla bilәr. Əgər әsas hipotezin doğruluğu şәrtindә on-un rәdd edilmәsi haqqında qәrar qәbul edilirsә, onda buraxılan bu cür sәhvә, birinci növ sәhv deyilir. Başqa sözlə, birinci növ sәhv doğru olan əsas hipotezin rədd edilməsidir. Belə səhvlər ehtimalı ilə xarakterizə edilir. Alter-nativ hipotezin doğruluğu şәrtindә әsas fәrziyyә qәbul edildikdә dә sәhv buraxılır. Bu cür səhvә ikinci növ sәhv deyilir. İkinci növ səhvin buraxılması doğru olmayan hipotezin qəbul edilməsidir. İkinci növ səhvlər ehtimalı ilə xarakteri-zə edilir.



Aydındır ki, düzgün qәrar iki halda ola bilәr.

**Cәdvәl 1.**

**Birinci vә ikinci növ sәhvlərin yaranma şәrtləri**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Hipotezin yoxlanılmasının nəticələri | Yoxlanılan hipotezin mümkün halları | |
| hipotezi doğrudur | hipotezi doğrudur |
| Hipotez rədd edilir  Hipotez qəbul edilir | Birinci növ sәhv  Düzgün qәrar | Düzgün qərar  İkinci növ sәhv |

Birinci növ sәhvin buraxılma ehtimalına əhəmiyyətlilik sәviyyәsi deyilir. Başqa sözlə, əhəmiyyətlilik səviyyəsi doğru olan əsas hipotezin rədd edilmə ehtimalıdır:



Praktiki mәsәlәlərin həllində α əhəmiyyətlilik sәviyyәsinin *0,1; 0,05; 0,01;* *0,001* qiymәtlərindәn istifadә edilir. İqtisadi tədqiqatlarda əhəmiyyətlilik sәviyyәsi-nin *0,05* vә *0,01* standart səviyyələrindən istifadә edilir.

Əhəmiyyətlilik sәviyyәsi əvvəlcədən verilir. Əhəmiyyətlilik səviyyəsinin –ya bərabər olması o deməkdir ki, *100* haldan, *100* halda birinci növ səhv buraxıla bilər, yəni doğru olan hipotez rədd edilə bilər. nә qәdәr kiçik olsa belə –nın *S* oblastına düşmәsi hadisәsinin kifayәt qәdәr kiçik ehtimallı olmasına baxmayaraq, o mümkün olmayan hadisә deyil. Ona görə dә әsas hipotezinin doğruluğu şәr-tindә –nın qiyməti S oblastına düşә bilәr. Bu halda  hipotezini rədd edərək, biz ehtimalı əhəmiyyətlilik sәviyyәsi ilә ölçülәn birinci növ sәhvә yol veririk. –nın kiçilməsilə birinci növ sәhvin buraxılma ehtimalı kiçilir və böhran oblastı daralır. Belәliklә, əsas hipotez doğru olmadıqda belə, –nın müşahidə edilən qiymәtinin böhran oblastına düşmәsi az ehtimallı olur. *=0* olduqda isә kriteriyanın müşahidə edilən qiymәtindən asılı olmayaraq əsas hipotez hәmşә qәbul ediləcəkdir. Ona görə də –nın kiçildilmәsi ikinci növ səhvə, yәni doğru olmayan hipotezin qәbul edilməsi hadisәsinin ehtimalının artırılmasına gətirib çıxarır. Bu mənada, birinci vә ikinci növ sәhvlәr rәqibdir.



Əksər hallarda göstәrilәn səhvlərin nәticәləri eyni deyildir. Belә ki, sәhvlәrdәn biri daha ehtiyatlı qәrarın, digəri isә heç bir әsası olmayan qәrarın qәbul edilmәsinә gətirib çıxarır. Hansı növ səhvin buraxılmasının “yaxşı” və ya “pis” olması mәsə-lәnin konkret qoyuluşundan vә әsas fərziyyənin mәzmunundan asılıdır. Məsələn, əgər mәhsulun keyfiyyәti haqqında әsas fәrziyyә yoxlanırsa vә birinci növ sәhv buraxılıbsa bu zaman yararlı mәhsul qüsurlu mәhsul kimi qәbul edilir. Әksinә ikin-ci növ sәhv buraxılıbsa, biz istehlakçılara qüsurlu mәhsul göndәririk. Göründüyü kimi, bu halda ikinci növ sәhvin nәticəsi daha ciddi әhәmiyyәt kәsb edir.

Hər iki sәhvi aradan qaldırmaq mümkün olmadığına görə hər bir konkret məsə-lədə bu səhvlərdәn irәli gәlən itkini minimallaşdırmağa çalışırlar. Әlbәttә, yaxşı olar ki, eyni zamanda hәr iki sәhvin buraxılma ehtimalı kiçik olsun, lakin onlar rəqib olduğuna görə sәhvlәrdәn birinin buraxılma ehtimalının kiçildilmәsi, digər sәhvin buraxılma ehtimalını artırır. Ona görə dә hәr bir konkret halda kompromis qәrar çıxarmaq lazımdır. Әksәr hallarda seçmәnin hәcminin artırılması eyni zamanda hәr iki sәhvin buraxılma ehtimalının kiçildilmәsinin yeganə yoludur.

Alternativ hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın böhran oblastına düşməsi ehtimalına, yəni alternativ hipotezin doğruluğu şərtində əsas hipotezin rədd edilmə ehtimalına kriteriyanın gücü deyilir.

İkinci növ səhvin buraxılma ehtimalına, yəni doğru olmayan hipotezin qəbul edilməsi ehtimalına kriteriyanın gücü deyilir və ilə işarə edilir. “ikinci növ səhv buraxılmışdır” hadisəsinin ehtimalı olduğundan onun tamamlayanı olan “ikinci növ səhv buraxılmamışdır” hadisəsinin ehtimalı 1–olar.Buradan aydın olur ki, kriteriyanın gücü ikinci növ səhvin buraxılmaması hadisəsinin ehtimalıdır.



Kriteriyanın gücünün artması ilə ikinci növ səhvin buraxılma ehtimalı kiçilir. Deməli, kriteriyanın gücü nə qədər çox olarsa, ikinci növ səhvin buraxılma ehtima-lı bir o qədər kiçik olar. Beləlilə, əhəmiyyətlilik səviyyəsi seçildikdən sonra böhran oblastı elə qurulmalıdır ki, kriteriyanın gücü maksimal olsun. Bu tələbin ödənilmə-si ikinci növ səhvin buraxılma ehtimalının minimallığını təmin etməlidir.

**3. Statistik. hipotezlərin yoxlanılmasının ümumi sxemi**

İstәnilәn statistik hipotez yoxlanılarkәn aşağıdakı mәrhәlәlәr yerinә yetirilmә-lidir.

1.Tәdqiq edilәn mәsәlә statistik hipotez şәklindә dürüst ifadә edilmәlidir.

2.Әsas və alternativ hipotez seçilmәlidir. Alternativ hipotezin növü adәtən tәdqiq edilәn mәsәlәnin mahiyyətinə әsasәn müәyyәn edilir. Mәsәlәn, mәhsulun 5%–nin zay (qüsurlu) olması haqqında : *p=0,05* әsas fhipotezi yoxlanılarsa, onda alternativ hipotez : *p>0,05* şәklindә seçilmәlidir. Çünki, qüsurlu olma faizi 5–dәn kiçik olduqda, mәhsul onsuz da keyfiyyәtli mәhsul kimi qәbul edilәcәkdir.



3. *α*–əhəmiyyətlilik sәviyyәsi müәyyәn edilmәlidir.

4. Әsas vә alternativ hipotezin xarakterindәn asılı olaraq, birtәrәfli vә yaxud ikitәrәfli böhran oblastı seçilmәlidir. Əgər mürәkkәb alternativ hipotez şәklindәdirsә,bizi öyrәnilәn parametrinin –dən hәr iki tәrәfә kәnarlaşması ma-raqlandırdığına görə və ikitәrәfli böhran oblastı qurulur. Alterpativ hi-potez şəklində olduqda sol tərәfli, olduqda isə sağ tәrәfli böh-ran oblastı seçilir.



5.Qiymәtlərinә әsasәn hipotezin doğruluğu haqqında fikir söyləmәk müm-kün olan statistika seçilir. Statistika olaraq seçmənin elmentlərindәn asılı olan istәnilən funksiya götürmək olar. Göründüyü kimi, hər hansı bir hipotezi yoxlamaq üçün müxtәlif statistikalar seçmək olar. Seçilmiş statistikanın hipotezin yoxlanıl-ması kriteriyası kimi qәbul edilmәsi üçün o bir sıra optimallıq (yerinidәyişmәzlik, әsaslılıq vә effektivlik) şərtlərini ödəmәlidir.

Yerinidәyişmәzlik xassəsi әsas hipotezin qәbul oblastının simmetrikliyini tәmin edir. Әsaslılıq xassәsi paylanmanın mərkәz әtrafında daha yığçamlılığını təmin edir. Bu isә verilmiş *α* əhəmiyyətlilik sәviyyəsində ikinci növ sәhvin buraxılma ehtimalını kiçildir. Effektivlik xassәsi digər bәrabәr şәrtlәr daxilindә birinci vә ikinci növ səhvin ehtimalının kiçildilməsinә imkam verir.

6.Seçilmiş kriteriyanın paylanma qanunu müәyyәn edilməlidir. Qeyd edәk ki, bu mәrhәlә riyazi cәhətdәn hipotezlərin yoxlanılmasında әn çәtin mәrhәlәdir.

7. Kriteriyanın məlum paylanma qanununa әsasәn böhran oblastının növünә uyğun olaraq müvafiq tənliklərindən böhran nöqtәləri tapılmalıdır.

8. Həcmi nәzәrdә tutulan seçmә götürülmәli vә ona әsasәn kriteriyanın mü-şahidə edilən qiyməti hesablanmalıdır.

9. Statistik hipotezin yoxlanılması qaydası ifadә edilir və bu qaydaya әsasən statistik qәrar qәbul edilir. Belә ki, əgər kriteriyanın müşahidə edilәn qiymәti böh-ran oblastına düşürsә, onda әsas hipotez seçmә mәlumatlarla ziddiyyət təşkil edir və ona görə də rәdd edilir. Kriteriyanın müşahidә edilәn qiyməti qәbul oblastına düşdükdә isə əsas hipotez qәbul edilir. Çünki, o seçmə mәlumatlarla ziddiyyət təşkil etmir.

Qeyd edәk ki, yoxlanılan hər bir hipotez üçün uyğun kriteriyalar işlənib hazır-lanmışdır.

Kriteriyanın qurulması üçün ən çox normal, Styudent, Fişer–Snedekor vә Pirson statistikalarından istifadə edilir.

**4. Əlamətin hissəsi haqqında hipotezlələrin yoxlanması.**

**4.1. Әlamətin hissәsinin standartla muqayisәsi.**

Tutaq ki, hәr hansı әlamәtin *r* hissәsinin baş yığımda müәyyən kәmiyyәtinә bәrabәr olması haqqında әsas hipotezini yoxlamaq lazımdır. Alternativ hipotezi şәkilindә qəbul edək. Әsas hipotezi yoxlamaq üçün baş yığım-dan həcmi n olan seçmә götürәk. Tutaq ki, n elementdən saydası әlamәtә malik-dir. Onda әlamәtin hissәsi olar. Muavr–Laplasın inteqral teoremnә görə statistikası parametrli asimptotik normal kәmiyyәtdir.Onda normallaşdırılmış statistikası *(0,1)* parametrli asimptotik nor-mal kәmiyyәtdir.



Әsas hipotezi yoxlamaq üçün statistiksından istifadә edәk. Əsas hipotezin doğruluğu şərtində statistikası *(0,1)* parametrli asimptotik normal kәmiyyәtdir.



Böhran oblastı ikitərəflidir. Ona görə dә, verilmiş *α* əhəmiyyətlilik sәviyyәsi üçün Laplas funksiyasının qiymәtləri cədvəlindәn münasibətin-dən böhran nöqtəsini tapırıq.



Belәliklә olduqda әsas hipotezi qәbul edilir, olduqda isə o rәdd edilir.



İndi isә fәrz edәk ki, alternativ hipotez : r > şәklindәdir. Bu halda böhran oblastı sağtәrәflidir və böhran nöqtәsi



şәrtindәn tapılır. Belәliklә olduqda hipotezi qәbul edilir, ol-duqda isә rәdd edilir.



Alternativ hipotez : şəklində olduqda şərtindən sağtərəfli böhran nöqtəsi tapılır və qəbul edilir.



olduqda əsas hipotezi rədd etməyə heç bir əsas yoxdur.olduqda isə əsas hipotez rədd edilir.



**4.2. İki yığımda əlamətin hissələri haqqında hipotezin yoxlanılması**

Tutaq ki, birinci yığımdan hәcmi , ikinci yığımdan isə həcmi olan seçmə alınmışdır və elementdən –i, elementdən isə –i əlamətə malikdir. Onda birinci yığımda әlamәtin başvermә tezliyi, ikincci yığımda isə olar.



, başqa sözlə "hәr iki yığıma әlamәtinin hissәsi p olan eyni baş yığımdan seçmә kimi baxmaq olar." әsas hipotezini yoxlamaq tәlәb edilir.



Əsas hipotezi seçmә tezliklәr arasındakı fәrqin tәsadüfi seçmә mexanizmi ilә әlaqәdar olduğunu qәbul edir. Ona görə də bu cür hipotezləri әlamәtin hissәləri haqqında vә yaxud onlar arasındakı fәrqin әhәmiyyәtliyi haqqında fәrziyyәlər dә adlandırırlar.

Əsas hipotezi yoxladıqda böyük vә kiçik seçmәləri fәrqləndirmək lazımdır.

1.Böyük seçmәlәr. (n>30) və statistikaları müvafiq olaraq və parametrli assimptotik normal paylanmaya malikdirlər. statistikasının riyazi gözləməsini və dispersiyasını hesablayaq:



normallaşdırılmış statistikası əsas hipotezin doğruluğu şərtində, yəni olduqda *(0,1)* parametrli asimptotik normal kәmiyyәtdir. Naməlum erhimalının onun qiymətləndirməsilə əvəz edək.



әsas hipotezini yoxlamaq üçün



Beləliklə, kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti



olar.

Böhran oblastı ikitərəflidir. Ona görə dә, verilmiş *α* əhəmiyyətlilik sәviyyәsi Laplas funksiyasının qiymәtləri cədvəlindәn münasibətindən böhran nöqtəsini tapırıq.



Belәliklә olduqda әsas hipotezi qәbul edilir, olduqda isə o rәdd edilir.



İndi isә fәrz edәk ki, alternativ hipotez şәklindәdir. Bu halda böhran oblastı sağtәrәflidir və böhran nöqtәsi



şәrtindәn tapılır. Belәliklә olduqda hipotezi qәbul edilir, olduqda isә rәdd edilir.



Alternativ hipotez şəklində olduqda şərtindən sağtərəfli böhran nöqtəsi tapılır və qəbul edilir.



olduqda əsas hipotezi rədd etməyə heç bir əsas yoxdur.olduqda isə əsas hipotez rədd edilir.



2.Kiçik seçmәlər *(n<30)*. Aydındır ki, kiçik seçmələr üçün statistikasının normal paylanmaya malik olduğunu qәbul etmәk olmaz. Bu halda әsas hipotezi yoxlamaq üçün “xi–kvadrat” kriteriyasından istifadә edilir. Hәr iki seçmәnin eyni baş yığımdan götürüldüyünu qәbul edib, nə-zəri tezliklərini hesablayaq və *p*–ni onun qiymәtlәndirmәsi ilә əvəz ed-әk.



Onda

olar.



Dörd nәzәri tezlik arasında üç asılı olmayan münasibәt olduğuna görə onlardan biri sәrbәstdir. Bu isә o demәkdir ki, «xi–kvadrat” paylanmasının sәrbәstlik dərə-cəsi vahidə bərabərdir.

–ın ifadəsindən göründüyü kimi əsas hipotezin doğruluğu şərtindә nәzәri vә faktiki tezliklәr arasındakı fərqi yalnız tәsadüfi seçməmexanizmi ilə bağlamaq olar. Verilmiş əhəmiyyətlilik sәviyyәsinә vә *k=1* sәrbәstlik dərəcəsinә görə “xi–kvadrat” paylanmasının böhran nöqtələri cədvəlindәn böhran nöqtəsini tapırıq vә kriteriyanın qiymәtini hesablayırıq.



> olduqda əsas hipotez rәdd edilir, < olduada isә onun qəbulu haq-qında qәrar qәbul edirik.



**5. Orta qiymәtlər haqqında hipotezlərin yoxlanılması.**

**5.1. Seçmə ortanın hipotetik orta ilə müqayisəsi haqqında hipotezin yoxlanması.**

Tutaq ki, baş yığımının orta qiymәtinin müәyyәn bir ədədinә bərabər olması haqqında əsas hipotezini yoxlamaq lazımdır. Әsas hipotezi yox-lamaq üçün kriteriya seçərkən böyük və kiçik seçmələri fәrqlәndirmәk lazımdır.



1.Böyük seçmәlәr *(n>30)*.

a) Baş yığımın dispersiyası məlumdur.

Hipotezi yoxlamaq mәqsәdilә baş yığımından həcmi n olan seçmә götürәk və seçmә ortasını hesablayaq.Әsas hipotezi yoxlamaq üçün



kriteriyasından istifadә edәk. Aydındır ki, olar. Tutaq ki, alternativ hipo-tez şəklindədir. Bu halda böhran oblastı ikitәrәflidir. Böhran nöqtәləri-ni şərtindən tapırıq.



olduqda әsas hipotez rәdd edilir, әks halda isә onu rәdd etmәyә heç bir әsas yoxdur.



Alternativ hipotez şəklində olduqda sağtərəfli böhran nöqtəsi



şərtindən tapılır. olduqda əsas hipotez α əhəmiyyətlik səviyyəsi ilə rədd edilir. olduqda isə qəbul edilir. Bu isə o deməkdir əsas hipotez təjrübi verilənlərlə uzlaşır, yəni seçmə ortanın ümumi ortadan kənarlaşması seçmənin təsadüfi xətalarının nətijəsidir.



Tutaq ki, alternativ hipotez şəklindədir. Bu şərtindən sağtərəfli böhran nöqtəsi tapılır və onun əksi soltərəfli bıhran nöqtəsi olaraq qəbul edilir.



olduqda əsas hipoez qəbul edilir. olduqda isə o rədd ediıir.



b) Baş yığımın dispersiyası naməlumdur.

məlum olmadıqda әsas hipotezin yoxlanılmasında baxılan kriteriyadan isti-fadә etmәk olmaz. Mәrkәzi limit teoreminə əsasən seçmə orta asimptotik normal paylanmaya malikdir. Ona görə dә böyük *n*–lәr üçün (n>30 olduqda) –i onun yerinidәyişmәyәn seçmә qiymәtlәndirilmәsi ilә әvәz etmәk olar.



Bu halda kiçik seçmәlәr üçün



statistikasından istifadә etmәk daha mәqsәdә uyğundur. statistikası sәrbәstlik dәrəcəsi *v = n*–*1* olan Styudent paylanmasına malikdir. Kriteriya seçildikdәn sonra әsas hipotez eyni ilә dispersiyası mәlum olan hal kimi yoxlanılır.



**5.2.Orta qiymәtlərin müqayisәsi haqqında hipotezin yoxlanılması**

**5.2.1.Dispersiyalar məlum olan hal.Laplas kriteriyası.**

Tutaq ki, vә baş yığımlardır vә onların orta qiymәtlərinin bərabərliyi haq-qında əsas hipotezini yoxlamaq lazımdır. Әvvəlcә fәrz edәk ki, *DX* vә *DU* dispersiyaları mәlumdur. baş yığımından həcmi n1 olan seçmәsini, yığımından isә həcmi n2 olan seçmәsini götürәk. Baş yığımların seçmә ortalarını vә seçmә dispersiyalarını uyğun olaraq ,vә , kimi işarә edәk.



Aydındır ki, *E =EX* və *E=EU*. Seçmәlәr asılı olmadığına görə vә kəmiyyətləri dә asılı deyillәr. Deməli,



olar.

Әsas hipotezi yoxlamaq üçün



kriteriyasından istifadә edək. Bu kriteriyaya Laplas kriteriyası deyilir. Əsas hipotezin doğruluğu şәrtindә olar.



normal təsadüfü təsadüfü kəmiyyət olduğu üçün onun paylanması sıfra nəzə-rən simmetrikdir. Onda böhran nöqtələri də sıfra nəzərən simmetrikdirlər.



Belәliklә, ikitərəfli böhran oblastını və kriteriyanın qəbul oblastını qurmaq üçün sağtərəfli böhran nöqtəsini tapmaq kifayətdir. Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki,



–in paylanması sıfra nəzərən simmetrik olduğu üçün onun intevalına düşməsi hadisəsinin ehtimalı olar.Onda ehtimalların toplanması qanununa görə



Deməli ,



Beləliklə,



İkitərəfli böhran oblastı , kriteriyanın qəbul oblastı isə bəra-bərsizliyi ilə təyin edilir.



Beləliklə, vә baş yığımlarının vә dispersiyaları məlum olduqda hipotezini yoxlamaq üçün aşağıdakı qaydanı alarıq.



**Qayda**: Alternativ hipotez olduqda, dәqiqlik sәviyyәsinə görə Laplas funksiyası qiymətləri cәdvәlindәn



bərabәrliyinə əsasәn nöqtәsini tapırıq. olduqda əsas hipotezi qәbul edirik. olduqda isə əsas hipotezi rәdd edilir.



Bu halda sağtərəfli böhran oblastı qurmaq üçün əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın bu oblasta düşməsi ehtimalının əhəmiyyətlilk səviyyəsinə bərabər olması şərtindən istifadə edilir.



Aydındır ki,



Buradan



və yaxud



Beləliklə, alternativ hipotez *H1:EX>EU* olduqda böhran nöqtәsi bәra-bәrliyindən tapılır.



Alternativ hipotez *H1:EX<EU* olduqda soltərəfli böhran oblastı qurulur. Soltə-rəfli böhran nöqtəsi şərtindən tapılan sağtərəfli böhran nöq-təsinə simmetrikdir.



Beləlilə, soltərəfli böhran nöqtəsini tapmaq üçün әvvәlcә bәrabәr-liyindәn tapılır və soltərəfli böhran nöqtәsi – götürülür.



**5.2.2.Dispersiyalar məlum olmayan hal.Styudent kriteriası.**

İndi isә X vә U baş yığımlarının dispersiyaları məlum olmayan hala baxaq. Fərz edәk ki,

*DX=DU=*



Əsas hipotezi yoxlamaq üçün



kriteriyasından istifadə edək. Bu kriteriyanın paylanma qanunu aşağıdakı teorem vasitəsi ilə verilir.

**Teorem 1.** Tutaq ki, baş yığımından həcmi olan , baş yığı-mından isə həcmi olan təasdüfü seçimi alınmışdır. Fərz edək ki,



; ; ;



Onda



kəmiyyəti sərbəstlik dərəjəsi olan Styudent paylanmasına malikdir.



**İsbatı.**



olduğu üçün nəticəsinə görə olar. Eyni səbəbdən



olar.

Məlum teoremə görə və



kəmiyyətləri sərbəstlik dərəjələri uyğun olaraq *n1*–*1* və *n2–1* olan “xi–kvadrat” paylanmaya malikdirlər. Seçimlər asılı olmadıqları üçün

və yaxud olar. Digər tərəfdən ) cəmi sərbəstlik dərəjəsi olan χ2– paylanmaya malikdir və , kəmiyyətləri asılı deyillər.



Beləliklə, Styudent paylanmasının tərifinə əsasən kəmiyyətinin sərbəstlik dərəjəsi olan Styudent paylanmasına malik olduğunu deyə bilərik.



Beləliklә *α* dәqiqlik sәviyyәsi ilә orta qiymәtlərin bәrabәrliyi haqqında әsas hipotezini yoxlamaq üçün aşağıdakı qaydanı alırıq.



**Qayda 1.** Dәqiqlik sәviyyәsi α verildikdə vә alternativ hipotez şә-kilindә olduqda əsas hipotezini yoxlamaq üçün kriteriyanın *Tm* müşa-hidə edilәn qiymәtini ytsablayırıq. İkitərəfli böhran oblastı əsas hipotezin doğrulu-ğu şərtində kriteriyanın bu oblasta düşməsi ehnimalının verilmiş əhəmiyyətlilk səviyyəsinə bərabər olması şərtindən tapılır.Bu halda sol və sağtərəfli böhran nöqtələri



şərtlərindən tapıldıqda kreiteriya daha güclü olur.

Styudent paylanması sıfra nəzərən simmetrik olduğu üçün sağtərəfli böhran nəqtəsini tapmaq kifayətdir.



olduqda әsas hipotezi rәdd etmәyə heç bir әsas yoxdur olduqda isə әsas hipotez rədd edilir.



**Qayda 2.** Alternativ hipotez *H1:EX>EU* olduqda böhran oblastı əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın bu oblasta düşməsi ehnimalının verilmiş əhəmiy-yətlilk səviyyəsinə bərabər olması şərtindən tapılır:



tapılır. olduqda әsas hipotezi qəbul edirik, olduqda isә rәdd edilir.



**Qayda 3.** Alternativ hipotez *H1:EX<EU* olduqda әvvəlcә qayda 2–y әsasәn tapılır və soltərəfli böhran nöqtəsi kimi götürülür. olduqda әsas hipotezi rәdd etmәyә heç bir әsas yoxdur. olduqda isә hipotez rәdd edilir.



Orta qiymәtlərin bәrabәrliyi haqqında әsas hipotezi Styudent kriteriyasına әsasәn yoxlayarkәn əvvəlcə baş yığımların dispersiyalarının bәrabәrliyinә әmin olmaq lazımdır. Əgər dispersiyaların müqayisәsi zamanı onların әhәmiyyәtli dәrәcәdә fәrqlәndiyi aşkar olarsa, onda Styudent kriteriyasının kömәyilә orta qiymәtləri müqayisә etmәk olmaz. Belә ki, seçmәlәr dispersiyaları bәrabәr olan baş yığımlardan götürüldükdә Styudent paylanması ancaq sәrbәstlik dərәcəsindәn asılı olur. Dispersiyalar mәlum olmadıqda bu paylanma sәrbәstlik dәrәcәsi ilә yanaşı namәlum nisbәtindәn də asılıdır. Beləliklә nәticənin sәhvi orta qiymәt-lərin vә dispersiyaların müqayisәsi haqqında hipotezlərin sәhvlərinin mürəkkəb kombinasiyasından ibarәtdir. Bu cür hallarda orta qiymәtlərin bәrabərliyi haqqında әsas hipotezini yoxlamaq üçün



kriteriyasından istifadə etmək mәqsədәuyğundur. *T*–kriteriyası sәrbәstlik dərəcəsi



kimi təyin edilәn Styudent paylanmasına malikdir. Qeyd edək ki, ixtiyari *n1* vә *n2* üçün

*min(n1* –*1: n2* –*1)≤ k ≤ n1 + n2* –*2*

Əsas hipotezin yoxlanılması yuxarıdakına anoloji olaraq aparılır.

**6.Asılı seçmələr haqqında hipotezlərin yoxlanılması.**

Statistik hipotezlərin yoxlanılmasında elә hallara rast gəlinir ki, bu zaman müqayisә edilәn seçmәlәrә asılı olmayan seçmәlәr kimi baxmaq olmaz. Mәsәlәn, әnənәvi vә yeni yem payının mal–qaranın mәhsuldarlığına tәsiri eyni mal–qara qrupu üzәrindә yoxlanıla bilәr, iki növ әmtәәyә tәlәbat eyni mağazada öyrәnilә bilәr, hәr bir işçinin әmәk məhsuldarlığı sәviyyәsi yeni texnologiyanın tәtbiqindәn әvvәl vә sonra müәyyәn edilә bilәr, ana inәklərin vә qız inәklərin mәhsuldarlığı müqayisә edilә bilәr vә s. Göstәrilәn bu misalların hər biri asılı seçmәlərin müqa-yisәsi haqqında fәrziyyәlәrin yoxlanılmasına aiddir. Tәbii ki, asılı olmayan seçmә-lər üçün əvvəlki paraq­raflarda öyrәnilәn metodlar bu halda tәtbiq edilә bilmәz. Çünki, hәmin me­tod­ların tәtbiqi seçmәlərin asılı olmamazlıq şәrtinә əsaslanır. Asılı seçmә­lәr haqqında hipotezləri yoxlamaq üçün aşağıda göstәrilәn krite­ri­yadan istifadә etmәk olar.

Hәr bir müşahidə obyekti üçün iki x və y göstәricisini (mәsәlәn, әnә­nәvi vә yeni yem payına görə mal–qaranın məhsuldarlığını) qeyd edәk. Müşahi­dənin nəticəsini



kimi işarә edәk. Deməli *(xi; yi,), i=1,2,...,n* asılı cütlәr ardıçıllığıdır. Әgәr öyrәni-lәn amil ancaq *x* vә ya *y* әlamәtinә tәsir edirsә, onda *xi* vә *yi* arasında əhəmiyyətli fərq müşahidə edilәcәkdir. Bu fәrqin tәsadüfi kәnarlaşmalar vә ya öyrәnilәn amilin tәsiri hesabına olmasını müәyyәn etmәk üçün kriteriyanı seçәk. *di=xi–yi,i= 1,2,...,n* işarə edәk. Onda cüt müşahidəlәr fәrqinin umumilәşdirici kәmiyyәti olaraq



götürmək olar. Aydındır ki, *d* nə qәdәr kiçik olarsa müşahidəlәr fәrqinin bir o qәdәr kiçik olması hәqiqәtәuyğun olar. Ona görə dә әsas fәrziyyәni, *H0: d=0*

alternativ fәrziyyәni isә

;



şәklindә götürә bilərik. Әsas hipotezi yoxlamaq üçün

statistikasından istifadә edək. Burada



düzәldilmiş dispersiyadır.

Əgər baş yığım normal paylanmaya malikdirsә әsas hipotezin doğruluğu şәrtin-dә



statistikası sәrbәstlik dәrәcәsi *k=n*–*1* olan Styüdent paylanmasına malikdir. Krite-riya tәyin edildikdәn sonra əsas hipotez әvvəlki paraqraflarda olduğu kimi yox-lanılır.

7. Dispersiyaların bərabərliyi haqqında hipotezin yoxlanılması. Fişer–Snede-kor kriteriyası.

Təcrübədə dispersiyaların müqayisәsi haqqında hipotezlərin yoxlanılmasına tez-tez tәsadüf edilir. Belә ki, ölçü cihazlarının keyfiyyәti öyrәnilәrkәn onların disper-siyaları müqayisә edilir, yeni texpologiyanın tәtbiqindәn әvvәl vә sonra istehsal prosesinin stabililiyi tәhlil edilәrkәn mәhsul istehsalındakı kәnarlaşmalar orta kva-dratik kәnarlaşma ilә ölçülür. İki baş yığımın hәr hansı bir әlamәtә görə (mәsәlən, iş stajına, ixtisas dәrəcəsinә vә s) birincinsliyi yoxlanılarkən dә dispersiyalar müqayisә edilir. Baş yığımların orta qiymətləri haqqında fərziyyələr yoxlanılarkәn onların әksәr hallarda eyni dispersiyaya malik olduqları qәbul edilir və s.

Tutaq ki, *X* vә *Y* normal paylanmış baş yığımlardır. Onların dispersiyalarının bәrabәrliyini yoxlayaq. Bu mәqsәdlә *X* baş yığımından həcmi n olan , *Y* baş yığımından isә hәcmi m olan seçmәsini götürәk.



Әsas hipotezi , alternativ hipotezi *i* isә şәklindә götü-rәk.



Әvvәlcә fәrz edәk ki, *EX* vә *EY* orta qiymәtləri mәlum deyildir. Aydındır ki, әsas hipotezi uyğun



vә



düzәldilmiş seçmә dispersiyalarının müqayisәsinә әsasәn yoxlamaq olar. Belә ki, onların nisbәti vahidə yaxın olduqda dispersiyaların bәrabәrliyi haqqında әsas hipotezi rәdd etmәyә heç bir әsas yoxdur. Bu nisbәtin vahiddәn әhәmiyyәtli dərəcədә fәrqlәnmәsi isә әsas hipotezi rәdd edilmәsinә zәmin yaradır.

Ona görə dә seçmә dispersiyaların nisbәtinin hansı qiymәtindә uyğun qәrarın çıxarılmasının kifayәt qәdәr әsaslı olmasını müәyyәn etmәk lazımdır. Әsas hipotezi yoxlamaq üçün

burada



kriteriyasından istifadә edәk.

Kriterya olaraq qəbul edilmiş təadüfü kəmiyyətinin paylanması aşağıdakı teorem vasitəsilə müəyyən edilir.



**Teorem 1.** olduqda –təsadüfü kəmiyyəti sərbəstlik dərəcələri *n1–1* və *n2–1* olan Fişer–Snedekor paylanmasına malikdir.



**İsbatı:** nisbətini aşağıdakı kimi göstərək.



Məlumdur ki, və təsadüfü kəmiyyətləri sərbəstlik dərəjələri uyğun olaraq *n1–1* və *n2–1* olan χ2 paylanmasına malikdirlər. Tərifə əsasən bu isə o deməkdir ki, nisbəti sərbəstlik *n1–1* və *n2–1* olan Fişer–Snedekor paylanmasına malikdir.



Bu halda böhran oblastı və şəklindədir, böhran nöqtələri isə



,



şərtlərindən tapılır. Ancaq Fişer–Snedekor paylanmasının böhran nöqtәləri cәdvә-lindә soltərəfli böhran nöqtəsi verilməmişdir. Sağtərəfli böhran nöqtəsini şərtinən tapmaqla kriteriyanın ikitərəfli böhran oblastına düşmə-sini əhəmiyyətlilik səviyyəsinə bərabər ehtimalla təmin etmək olar.



və hadisələri uyuşmayan hadisələr olduqları üçün kriteriya-nın ikitərəfli böhran oblastına düşməsi ehtimalı –ya bərabər olar.



Beləliklə, böhran oblastı şəklində olduqda böh-ran nöqtəsini tapmaq kifayətdir.



Yuxarıda deyilənlərə əsasən orta qiymәtlәr mәlum olmadıqda dispersiyaların müqayisəsi üçün aşağıdakı qaydanı alırıq.

**Qauda 1.** Altenativ hipotez kriteriyasının *Fm* müşahidə edilәn qiy-mәtini hesablayırıq. Fişer–Snedekor paylanmasının böhran nöqtәləri cәdvәlindәn verilmiş dәqiqlik sәviyyәsinә vә n1, sәrbәstlik dərəcəsinә görə böhran nöqtәsini tapırıq. *Fm <*  olduqda әsas hipotezi rәdd etmәyə әsas yoxdur. > olduqda isә әsas hipotez rәdd edilir.



Alternativ hipotez şəklində olduqda sağtərəfli böhran oblastı əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın müşahidə edilən qiymətinin bu oblasta düşməsi hadisəsinin ehtimalının əhəmiyyətlilik səviyyəsinə bərabər olması şərtin-dən tapılır:



**Qayda 2.** Alternativ hipotez olduqda verilmiş dәqiqlik sәviyyә-sinә vә *n1, n2* sәrbәstlik dәrәcәlərinә görə böhran nöqtәsi tapılır.



*Fm <*  olduqda әsas hipotezi rәdd etmәyə әsas yoxdur. > olduqda isә әsas hipotez rәdd edilir.



**8.Baş yığımın paylanma funksiyasının növu haqqında hipotezin yoxlanılmas. Pirson kriteriyası.**

Empirik paylanma ilә nәzәri paylanmanın uzlaşması, başqa sözlә baş yığımın paylanma funksiyasının növü haqqında hipotezin yoxlanılması mühüm әhәmiyyәt kәsb edir. Bu cür hipotezlərin yoxlanılması üçün müxtәlif uzlaşma kriteriyaların-dan məsələn, K.Pirsonun “Xi–kvadrat”, Kolmoqorov, Smirnov və s. kriteriyaların-dan istifadə edilir.

Uzlaşma kriteriyaları empirik paylanma ilә nәzәri paylanma arasındakı kәnarlaşmanın әhәmiyyәtli və yaxud əhəmiyyәtsiz, yәni tәsadüfün nәticәsi olub-olmadığını müәyyәn etmәyә imkan verir.

Əlamәtin dәyişmә xarakteri haqqında ilkin nәzәri şәrtlәr baş yığım haqqında fәrziyyәnin irəli sürülmәsi üçün әsas götürülə bilәr. Bu şәrtlәrә mərkәzi limit teoreminə zәmin yaradan şәrtlərin ödәnilmәsini, Puasson paylanmasına gətirәn şәrtlərin ödәnilmәsini vә s. göstәrmәk olar.

Mәsәlәn, Lyapunovun mәrkәzi limit teoreminin şərtlərinә uyğun şәrtlərin ödә-nilmәsi baş yığımın normal paylanması haqqında hipotezi irəli sürmәyә əsas verir. Bir çox hallarda, empirik paylanmanın bәzi formal xassәləri nәzəri paylanmanın növü haqqında hipotezi söyləməyə imkan verir. Məsələn, asimmetriya və ekses əmsallarının sıfra bәrabәr olması baş yığımın normal paylanması haqqında hipotezi söylәmәyә әsas verir. Empirik paylanmanın seçmә ortasının və seçmә dispersiya-sının bәrabәrliyi isә nəzəri paylanmanın Puasson qanununa tabe olduğunu söylә-məyə әsas verir. Empirik paylanmanın poliqonuna vә histoqramına әsasәn də nәzә-ri paylanma haqqında bәzi hallarda fikir söyləmək olur.

Mәsəlәn, *(xi; ni) i=1,2,…,n* nöqәtәlərinin düzbucaqlı koordinat sistemindә müəyyәn düz xәttin yaxınlığında yerləşməsi baş yığımın normal paylanması haqqında hipotezi irәli sürməyə əsas verir. İrəli sürülən təkliflәr qәti olmadığına, yəni fərziyyə xarakterli olduqlarına görə onlar uzlaşma kriteriyalarının kömәyi ilә statistik yoxlanılmalıdır.

Tutaq ki, *X* baş yığımı *F(x)* paylanma funksiyasına malikdir. Әvvәlcә fәrz edәk ki, *F(x)* paylanma funksiyası tam müәyyәndir, yәni onun ifadәsi namәlum parametrlәrdәn asılı deyil vә istәnilәn *X* üçün hesablana bilәr. *X* baş yığımından həcmi *n* olan *x1,x2,....,xn* seçmәsini götürәk. *H0:* ”*X* baş yığımı paylanma funksiyasına malikdir” *F(x)* hipotezini yoxlamaq üçün kriteriya seçək. Aydındır ki, *H0* әsas *F(x)* hipotezinin doğruluğu şәrtindә paylanma fun-ksiyasına nәzəri paylanmasının anoloqu kimi baxmaq olar.Tәsadüf meyllәr nəticəsində bu iki paylanma funksiyası bir qayda olaraq bərabər olmayacaq. Bununla yanaşı, mәlum Qlivenko teoreminә görə *n*–nin kifayәt qədər böyük qiymәtlərindә –ə ehtimala görə yığılacaqdır. Ona görə dә əvvәlcә empirik paylanma funksiyasının nəzəri paylanma funksiyasından meylinin ölçüsü müәyyәn edilmәlidir. Axtarılan kriteriya bu ölçünün empirik paylanmanın xassәlərinә әsaslanaraq seçilmәlidir. Bu cür meyl ölçülərini müxtәlif şәkildә müәyyәn etmәk olar. Ancaq onların içərisində ən çox istifadə ediləni K. Pirson tərəfindən tәklif edilmiş “xi–kvadrat” kriteriyası ilə bağlı olan meyl ölçüsüdür.



Tuqaq ki, X tәsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasının müəyyənfunksiyası olması hipotezini seçməsi vasitəsilə yoxlamaq lazımdır. *X* tәsadüfi kəmiyyətinin qiymәtlәr çoxluğunu *k* sayda kəsişməyәn *S1,…,Sk* interval-larına ayraq. Bu kəmiyyətin *S1,…,Sk* intervallarına düşmə ehtimalını nəzəri paylanma funksiyası vasitəsilə tapmaq olar:



Fәrz edәk ki, *pi>0*,. ilә seçməsinin *Si* intervalına düşәn element-lərinin sayını işarә edək. . Onda *X* kәmiyyәtinin qiymətlәrinin *n* sınaq nə-ticəsində *Si* intervalına düşməsinin tezliyi olar.



,



Belәliklә, seçmənin empirik paylanma funksiyasının *Si* intervalında artımı , nəzəri paylanma funksiyasınınkı isә *pi* olar. Seçmənin pay-lanma funksiyasının nəzəri paylanma funksiyasından meylini xarakterizə edə ölçünü müəyyən edək. Әn kiçik kvadratlar üsuluna görə nәzәri paylanma funksiyasının seçmәnin empirik paylanma funksiyasından meylinin ölçüsü olaraq, əmsalları az–çox ixtiyari qaydadan seçilә bilәn



kəmiyyəti götürülә bilәr.

K. Pirson isbat etmişdir ki, götürüldükdә, alınan



meyl ölçüsü hәddәn artıq yaxşı xassәlәrә malikdir. Belә ki, müşahidə edilәn tezlikləri vә gözlәnilәn *npi* tezlikləri ilә sadә şəkildə ifadә edilir. Aydındır ki, em-pirik və nəzəri tezliklər nə qədər yaxın olarlarsa, kəmiyyəti bir o qədər kiçik olar və o, müəyyən dəqiqliklə empirik paylanmanın nəzəri paylanmadan meylinin ölçüsü olaraq qəbul edilə bilər.



K. Pirson isbat etmişdir ki, kәmiyyәtinin paylanma funksiyasının limit qiymәti “xi–kvadrat” paylanmasıdır.



Paylanmanın sərbəstlik dərəcəsi *r–1–k* ədədinə bərabərdir. Burada *r* qrupların sayı k isə paylanmanın parametrləri sayıdır.

Kriteriyanı qurmaq məqsədilə elə sabit ədədi götürək ki, əsas hipotezin doğruluğu şərtində hadisəsinin ehtimalı kifayət qədər kiçik olsun, yəni bu hadisə praktiki olaraq mümkün olmayan hadisə olsun. Bu isə o deməkdir ki, əsas hipotezin doğruluğu şərtində seçməsi üçün bərabərsizliyinin ödənilməsi praktiki olaraq mümkün deyildir. Buradan *H0*әsas hipotezini yoxla-maq üçün K.Pirsonun aşağıdakı uzlaşma kriteriyası alınır:



Verilmiş *α* əhəmiyyətlilik sәviyyәsinә vә *r–1–k* sәrbәstlik dәrәcəsinә görə “xi*–*kvadrat” kriteriyasının böhran nöqtələri cәdvәlindәn böhran nöqtә­sini tapırıq. olduqda nəzəri və empirik paylanma tam üst*–*üstә düşür. olduqda *H0* әsas hipotez rәdd edilir. olduqda isə әsas hipotez qәbul edilir.



*–*kriteriyasının tәtbiqi zamanı aşağıdakı şərtlərә riayət edilmәlidir:



1) tәcrübü mәlumatlar asılı olmamalıdır, yəni onlar təsadüfi seçmәnin nəti-

cələri olmalıdırlar;

2) seçmәnin hәcmi kifayәt qәdәr böyük olmalıdır (praktiki olaraq *n> 50*);

3) hәr bir intervalda әn azı *5* element olmalıdır.

Axırıncı şәrt ödәnilmәdikdә tezlikləri *5–*dən kiçik olan intervalları әvvәlcәdәn birlәşdirmәk lazımdır.

Indi isə kriteriyasının köməyilә *H0*: “Baş yığım normal paylanmaya malik-dir” әsas fərziyyəsini yoxlayaq. Başqa sözlә, seçmәsinә normal paylanma funksiyasına malik tәsadüfü kәmiyyәtin qiymәtləri kimi baxmaq olar.



Aşağıdakı iki hala baxaq:

1.Empirik paylanma bərabər addımlı intervallar ardıcıllığı və onlara uyğun

tezliklər şəklində verilmişdir.

Seçmәnin bütün elementlərini öz daxilində saxlayan intervalı, eyni uzunluqlu *r* sayda kəsişməyən *(xi, xi+1)* intervallarına bölək və *i–*ci intervaldakı elementlərin sayını ilә işarә edәk.Qruplaşdırma intervallarının orta nöqtələrini variant olaraq qəbul edək.



Әsas fәrziyyәnin doğruluqu şərtində *i–*ci intervala uyğun ehtimalını hesab-layaq. Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki,



Burada Lanlas funksiyasıdır. və *σ* parametrləri mәlum olduqda Laplas funksiyasının qiymәtləri cәdvәlindәn ehtimallarını tapa bilərik. Ancaq təcrübədə əksər hallarda və *σ* parametrləri məlum olmur. Ona görə də onları seçmə orta və seçmə orta kvadratik meyl ilə əvəz edirlər. Bu xarakteris-tikaları hesablayarkən seçmənin elementi olraq qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsi götürülür:



Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki, *X* tәsadüfi kəmiyyətinin *(xi, xi+1)* intervalına düşməsi ehtimalı təqribən onun üzunluğu ilə sıxlıq funksiyasının bu intervalın hər hansı nöqtəsindəki qiymətinin hasinə bərabərdir. Xüsusi halda



Məlumdur ki, . Burada standart normal sıxlıqdır.



Onda .*–*nı ilə, *σ–*nı isə əvəz etsək ,



**MÖVZU 13. DISPERSIYA ANALIZI.**

**P L A N**

**1. Dispersiya analizi modelləri**

**2. Birfaktorlu dispersiya analizi (müxtəlif səviyyədə eyni sayda**

**olmayan sınaqlar)**

**2.1 Dispersiya analizinin əsas tənliyi**

**2.2. Cəmlərin hesablanması**

**2.3.Cəmlərin sərbəstlik dərəcələri.Faktor və qalıq dispersiyalar.**

**3.Qrup ortalarının bərabərliyi haqqındahipotezin yoxlanması.**

**4.Bütün səviyyələrdə eyni sayda sınaqlar**

Ə D Ə B İ Y Y A T

1.S.Ö.Ömərov, N.Ə.cavadov.Riyazi və tətbiqi statistika.Bakı, Azərnəşr, 2007.

2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çaşıoğlu, 2006.

**1. DISPERSIYA ANALIZI MODELLƏRI**

Riyazi statistikanın metodları müxtəlif eksperimental tədqiqatla­rın aparılmasın-da geniş tədbiq edilir. Bu metodlar sınaqların planlaş­dırılmasında və onların nəticə-lərinin təhlilində də mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Belə metodlardan biri də disper-siya analizi metodudur. Dispersiya analizi–nəticələri müxtəlif keyfiyyət faktorları-nın təsirindən asılı olan sınaqların statistik analizi metodudur. Bu metodun kömə-yilə nəticə əlamətinə təsir edən faktorlardan mühüm olanları seçilir və hər bir faktorun təsir dərəcəsi qiymətləndirilir.

Dispersiya analizi metodunun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, nəticə əlamətinin dispersiyası asılı olmayan təsadüfü toplananların cəmi şəklində göstərilir. Bu toplananlardan hər biri bu və ya digər faktorun təsirini, onların birgə təsirini və təsadüfü faktorların təsirini xarakterizə edir. Təsadüfü toplananların dispersiyaları-nın müqayisəsi bu və ya digər keyfiyyət faktorunun nəticə əlamətinə təsir edib-etməməsini müəyyən etməyə imkan verir.

Tutaq ki, *–*tədqiq edilən əlamət, isə ona təsir edən faktor­dur. Bu cür modelə birfaktorlu dispersiya modeli deyilir. əlamətinin orta kəmiyyətini ilə işarə edək. Onda kənarlaşmanı şəklində göstərmək olar. Burada faktorunun təsiri hesabına kənarlaşmanı, *–*isə digər təsadüfü faktorların təsiri hesabına kənarlaşmanı xarakterizə edir. Burada və asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər kimi qəbul edilir. Onda olduğunu yaza bilərik. Burada faktor dispersiyadır, isə modelə daxil edilməyən və ya təsadüfü faktorların təsiri ilə şərtlənən qalıq dispersiyadır. və - nı müqayisə etməklə əla-mətinin əlamətinə təsir edib*–*etməməsini müəyyən etmək olar. Belə ki, dispersi­yalar əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənirsə, faktorunun təsiri də əhəmiyyətlidir.



Tutaq ki, əlamətinə iki və faktorları təsir edir. Onda olar. Bu cür modelə ikifaktorlu dispersiya modeli deyilir. Burada - faktorunun, *–*faktorunun, isə təsadüfi faktorların şərtləndirdiyi kənarlaşmalardır.



Birfaktorlu dispersiya analizində olduğu kimi, və dspersi­ya­larını ilə müqayisə etməklə və faktorlarının əlamətinə təsir dərəcəsini müəyyən etmək olar. və dispersiyalarını müqayisə etməklə və faktorlarının əlamə-tinə müqayisəli təsirini müəyyən etmək olar.



**2. Birfaktorlu dispersiya analizi (müxtəlif səviyyədə eyni sayda olmayan sınaqlar)**

Tutaq ki, hər hansı normal paylanmaya malik əlamətinə keyfiyyət fakto-ru təsir edir. Faktorun səviyyələrini ilə işarə edək. Fərz edək ki, faktorun səviyyəsində sayda sınaq aparılmışdır.



*–*ilə faktorun səviyyəsində aparılmış *–*cu sınağın nəticəsini işarə edək.



Sınaqların nəticələrini aşağıdakı cədvəldə əks etdirək:

**Cədvəl 1.**

**Sınaqların nəticələri**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Faktorun səviyyəsi | Əlamətin müşahidə edilən qiymətləri | Sınaqların sayı | Qrup ortaları |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
| Yekunu | \_\_ |  |  |

Ümumi və qrup ortaları üçün aşağıdakı işarələmələri qəbul edək:

( qrup ortaları)



(ümumi orta)



Əlamətin müşahidə edilən qiymətlərinin ümumi ortadan kənarlaşmalarının kvadratları cəmini aşağıdakı kimi çevirək:

Süm=



olduğuna görə



olar.

Digər tərəfdən



Beləliklə,,



Axırıncı bərabərliyin sağ tərəfindəki birinci cəm, yəni qrupun müsahibə edilən qiymətlərinin qrup ortasından kənarlaşmalarının kvadratları cəmi qrup daxilində səpələnməni xarakterizə edir və qalıq cəm *(Sqal)* adlanır. İkinci toplanan isə qrup-lararası səpələnməni xarakterizə edir və faktor cəm *(Sfakt)* adlanır. Başqa sözlə desək *Sfakt*–faktorun əlamətinə təsirini, Sqal isə təsadüfü amillərin təsirini xarak-terizə edir.



Beləliklə,

*Süm= Sfakt +S qal*

olar.

Axırıncı tənliyə dispersiya analizinin əsas tənliyi deyilir. Təcrübədə qalıq cəmi adətən

*Sqal = Süm -Sfakt*

kimi hesablayırlar.

**2.2. Cəmlərin hesablanması.**

Dispersiya təhlilinin əsas tənliyində iştirak edən cəmlərin hesablanması müşa-hidələrin sayı kifayət qədər böyük olduqda texniki cəhətdən çətinlik yaradır. Ona görə də təcrübədə onların hesablanması üçün sadələşdirilmiş düsturlardan istifadə edilir.

və



qəbul edək.



Beləliklə,



Digər tərəfdən,

*Sfakt*=



= .



Deməli,



**2.3.Cəmlərin sərbəstlik dərəcələri.Faktor və qalıq dispersiyalar.**

Dispersiyaların yerini dəyişməyən qiymətləndirmələrini tapmaq üçün kvadrat-lar cəmini sərbəstlik dərəcələrinin sayına bölmək lazımdır. *no* ilə ümumi cəmin, *n1* ilə faktor cəmin və *n2*ilə qalıq cəmin sərbəstlik dərəcəsini işarə edək. Ümumi cəmin sərbəstlik dərəcəsi *no = N –1* olar. Belə ki, bir sərbəstlik dərəcəsi ümumi orta hesablanan zaman itirilir. *p* sayda qrup ortaları hesablandıqda *p* sayda asılı olmayan münasi­bətlərdən istifadə edildiyinə görə *n2 = N– p* olar.Eyni ilə faktor cəmin hesablanmasında ümumi cəmin tapılmasında olduğu kimi bir sərbəstlik dərəcəsi itirilir. Ona görə də faktor cəmin sərbəstlik dərəcəsi *p–1* olar.

*n1 + n2 = N - p + p -1= N-1= no*

Beləliklə,, dispersiyaların yerini dəyişməyən qiymətləndirmələri aşağıdakı kimi olar.

(ümumi dispersiyal)



(faktor dispersiya)



(qalıq dispersiya)



Dispersiyaların qiymətləndirilməsini aşağıdakı xüsusi cədvəldə əks etdirək.

**Cədvəl 2**

**Dispersiyaların analizi cədvəli**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Variasiyanın xarakteri | Kvadratlar cəmi | Sərbəstlik dərəcələrinin sayı | Qrup ortaları |
| Sistematik (qruplararası) |  | *p -1* |  |
| Qalıq (Qrupdaxili ) |  | *N-p* |  |
| Yekunu |  | *N-1* | - |

**3.Qrup ortalarının bərabərliyi haqqında hipotezin yoxlanması.**

Fişer–Snedekor kriteriyasına əsasən faktor və qalıq dispersiyaları müqayisə edək:



*F müş < F böh* olduqda qrup ortalarının bərabərliyi haqqında əsas hipotez qəbul edilir. Əks halda isə o rədd edilir.

Əsas hipotezin qəbulu F faktorunun tədqiq edilən əlamətə təsir etməməsini göstərir. Alternativ hipotez qəbul edildikdə *F* faktoru *X* əlamətinə əhəmiyyətli dərəcədə təsir edir.

***Amil əlamətlərinin nəticə əlamətinə təsir dərəcəsinin ölçülməsi aşağıdakı kimi izah edilir:***

1. Əgər *F* faktoru əlamətinə əhəmiyyətli təsir edirsə onda fakto­run hər-hansı bir səviyyəsində əlamətin müşahidə edilən qiymətləri digər səviyyədəki müşahidə edilən qiymətlərdən fərqlənəcəkdir. Bu isə o deməkdir ki, qrup ortaları fərqli olacaqdır. Bununla yanaşı qrup ortalarının ümumi orta ətrafında səpələn-mə dərəcəsi faktorun təsir dərəcəsindən asılı olacaqdır. Buradan aydın olur ki, faktorun əlamə­tinə təsir dərəcəsini qiymətləndirmək üçün qrup ortalarının ümumi ortadan kənarlaşmalarının kvadratları cəmini müəyyən etmək lazımdır. Müsbət və mənfi kənarlaşmaların bir*–*birini silməməsi üçün kənarlaş­malar kvad-rata yüksəldilir.



2. Məntiqə görə qrup daxilində əlamətin muşahidə edilən qiymətləri fərqlən-məli deyillər. Ancaq *–*ə *F* faktorundan başqa digər təsadüfü faktorlar da təsir etdiyinə görə əlamətin müşahidə edilən qiymətləri fərqli olacaqlar və qrup ortanın ətrafında yerləşəcəklər. Buradan aydın olur ki, təsadüfü səbəblərin təsirini xarak-terizə etmək üçün hər bir qrupun müşahidə edilən qiymətlərinin qrup ortalarından kənarlaşmalarının kvadratları cəmini tərtib etmək lazımdır. Bu isə o deməkdir ki, *Sqal* təsadüfi səbəblərin təsirini xarakterizə edir.



3.Əlamətin müxtəlif səviyyələrdə müşahidə edilən qiymətlərinə bir statistik yığım kimi baxaq. əlamətinə *F* faktorunun və təsadüfü səbəblərin təsirinə görə əlamətin müşahidə edilən qiymətləri fərqli olmalıdırlar. Aydındır ki, bu təsiri səciyyələndirmək üçün əlamətin müşahidə edilən qiymətlərinin ümumi ortadan kənarlaşmalarının kvad­ratları cəmi *–Süm,F* faktorunun və təsadüfü səbəblərin təsiri ilə ölçülür.



4. Tutaq ki, qrup ortalarının bərabərliyi haqqında əsas fərziyyə doğrudur. Bu halda faktor və qalıq dispersiyalar naməlum baş dispersiyanın yerinidəyişmə-yən qiymətləndirmələridir və onlar əhəmiy­yətli dərəcədə fərqlənməyəcək. Ona görə də bu qiymətləndirmələrin *F* kriteriyasına əsasən müqayisəsi əsas hipotezin qəbulunu şərtlən­dirəcək.

5. Tutaq ki, əsas hipotez yalandır. Bu halda qrup ortalar arasındakı fərqlərin artması ilə faktor dispersiyalar artacaqdır və nəticədə nisbəti də artacaq-dır. Aydındır ki, *Fmüş. Fböh–*dan böyük olacaqdır və əsas hipotez rədd ediləcəkdir.



Beləliklə, qrup ortalarının bərabərliyi haqqında əsas hipotez yalandırsa, onda faktor və qalıq dispersiyaların bərabərliyi haqqında əsas hipotez də yalandır və tərsinə. Deməli, qrup ortalarının bəra­bərliyi haqqında əsas hipotezi yoxlamaq üçün faktor və qalıq dis­persiyaların bərabərliyi haqqında əsas hipotezi yoxlamaq kifayətdir.

***Qeyd 1.*** Əgər təhlil nəticəsində qalıq cəmin faktor cəmindən kiçik olduğu aşkar edilərsə, onda hesablanmanı dayandırmaq lazımdır. Belə ki, bu halda əsas hipotez doğrudur.

***Qeyd 2.*** Əgər dispersiyaların bərabərliyi haqqında məlumat yox­dursa, onda onların bərabərliyi haqqında hipotez müvafiq kriferi­yalardan birinin, məsələn, Koçren kriteriyasının köməyi ilə yoxlanılmalıdır.

***Qeyd 3***. Faktor dispersiyası qalıq dispersiyasından kiçik olarsa, onda buradan bilavasitə qrup ortalarının bərabərliyi haqqında əsas hipotezin doğruluğu alınır, ona görə hesablamanı davam etdirməyə (dispersiyaların Fişer*–*Snedekor kriteriya-sının köməyi ilə müqayisəsi) ehtiyac qalmır.

***Qeyd 4.*** *Xij* – müşahidə olunan qiymətlər vergüldən sonra *k* rəqəmi olan onluq kəsrdirsə, onda

*Y ij = 10KXij – C*

tam ədədlərinə keçmək məqsədəuyğundur; burada *C–*təqribən ədədlərinin orta qiymətidir. Bu halda faktor və qalıq dispersiyalarının hər biri dəfə artacaqdır, lakin onların nisbəti düşməyəcəkdir.



**4.Bütün səviyyələrdə eyni sayda sınaqlar**

Tutaq ki, *X* əlamətinə p sayda *F1, F2,.., Fp* sabit səviyyələri olan *F* faktoru təsir edir. Hər bir səviyyədə q sayda sınaq aparılmışdır. *n1=n2=…=np= q* olduqda əlamətin müşahidə olunan qiymətlərinin ümumi ortadan kənarlaşmalarının kvadratları cəmini aşağıdakı kimi göstərmək olar.



Burada,



qrup ortalarının ümumi ortadan kənarlaşmalarının kvadratları cəmidir ( qruplar arasında səpələnməni xarakterizə edir),



qrupun müşahidə olunan qiymətləri ilə öz qrup ortasından kənarlaşmalarının kvadratlarının qalıqlar cəmidir (qruplar daxilində səpələnməni xarakterizə edir).

Təcrübədə *Süm və Sfakt*cəmlərini hesablamaq üçün aşağıdakı düsturlardan istifadə etmək daha məqsədə uyğundur:

Süm=



S fakt=



Əlaməti müşahidə olunan qiymətləri kifayət qədər böyük ədədlər olduqda, hesablamaları sadələşdirmək üçün hər bir müşahidə edilən qiymətdən, təxminən ümumi ortaya bərabər olan *C* ədədini çıxmaq lazımdır. Azaldılmış qiymətlər *Yij = Xij – C* olarsa

Süm=



Sfakt =



Burada əlamətin *Fj* səviyyəsində azaldılmış qiymətlərinin kvadratları cəmi;



əlamətin *Fj* səviyyəsində azaldılmış qiymətlərin cəmidir.



**Mövzu 14.Korrelyasiya analizi.**

**P L A N**

**1. Korrelyasiya analizi haqqında anlayış**

**2. Şərti ortalar.Korrelyasiya cədvəli.**

**3. Seşmə korrelyasiya və determinasiya əmsalları**

**4. Cüt xətti korrelyasiya**

**5. Seçmə xarateristikaların hesablanması**

**6. Əlaqə parametrlərinin əhəmiyyətliliyinin yoxlanılması və etibarlılıq**

**intervalının qurulması.**

*Ə D Ə B İ Y Y A T*

1.S.Ö.Ömərov, N.Ə.cavadov.Riyazi və tətbiqi statisyika.Bakı, Azərnəşr, 2007.

2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çaşıoğlu, 2006.

**Mövzu 14.Korrelyasiya analizi.**

**1. Korrelyasiya analizi haqqında anlayış**

Məlumdur ki, xalq təsərrüfatının bütün sahələri arasında qarşılıqlı əlaqə və asılılıq vardır. Məsələn, kənd təsərrüfatının inkişafı sənayenin inkişafı ilə sıx əlaqədardır. Belə ki, sənaye kənd təsərrüfatını müxtəlif kənd təsərrüfatı maşınları ilə, mineral gübrələrlə və s. təmin edir, kənd təsərrüfatı isə öz növbəsində sənaye-nin bir sıra sahələrini, o cümlədən, yüngül və yeyinti sənaye sahələrini xammalla təmin edir.

Sosial–iqtisadi hadisələrin göstəriciləri arasında da qarşılıqlı əlaqə vardır.Belə ki, əmək məhsuldarlığı ilə məhsulun maya dəyəri göstəriciləri, məhsul istehsalı ilə əmək məhsuldarlığı arasında sıx əlaqə mövcuddur.

Aydındır ki, iqtisadi göstəricilərin özləri də bir sıra amillərdən asılı olaraq dəyişir.Məsələn,dənli bitkilərin məhsuldarlığına torpağın keyfiyyəti, bir hektar sahəyə verilən üzvü gübrənin miqdarı, yağıntının miqdarı və bir sıra digər amillər təsir edir.

Deməli, hadisələr bir–biri ilə sıx əlaqədardır və bir–birindən asılıdırlar. Məhz bu səbəbə görə də hadisələr və onları xarakterizə edən göstəricilər arasındakı qarşı-lıqlı əlaqələri, asılılıqları müəyyən etmək və onların sıxlıq dərəcələrini ölçmək, yəni statistik təhlil aparmaq olduqca vacibdir.

Korrelyasiya analizi riyazi statistikanın əsas metodlarından biri olub, hadisələr və onların elementləri arasındakı qarşılıqlı əlaqələrin statistik təhlilində mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Korrelyasiya termini latın sözü ’’correlatio’’ –dan əmələ gəlmişdir ki, bu da ’’münasibət’’ və yaxud ’’qarşılıqlı əlaqə’’ deməkdir.

Qeyd etmək lazımdır ki, hadisələr və onların əlamətləri arasındakı asılılıqlar funksional və korrelyasiya asılılıqlarına bölünür. Funksional asılılıqlara adətən təbiət elmlərində təsadüf edilir. Bu cür asılılıqların mühüm cəhəti ondan ibarətdir ki, amil əlamətinin kəmiyyəti ilə nəticə əlamətinin kəmiyyəti arasında birqiymətli uyğunluq olur. Məsələn, kvadratın  tərəfi ilə onun  sahəsi arasında funksional asılılıq mövcuddur. Belə ki, kvadratın sahəsi onun tərəfinin kvadratı ilə düz mütənasibdir, yəni .

Burada tərəf–amil əlaməti, sahə isə nəticə əlamətidir. Qeyd edək ki, təsadüfi kəmiyyətlər arasında da funksional asılılıq ola bilər. Məsələn, tutaq ki,  və zərin atılmasında yuxarı düşən üzündəki rəqəmdir. Burada –təsadüfi kəmiy-yətdir və o, 1, 2, …, 6 qiymətlərinin hər birini  ehtimalı ilə alır. Ancaq verildikdə birqiymətli olaraq təyin edilir.



Sosial–iqtisadi hadisələr arasında funksional asılılıqdan fərqli olan asılılıqlar mövcuddur. Bu cür asılılıqlar “möhkəm” olmur və onların çoxluğu ilə xarakterizə edilir. Məsələn, məlumdur ki, əmək məhsuldarlığı səviyyəsi əməyin enerji ilə silahlanma səviyyəsindən bilavasitə asılıdır. Yəni əməyin enerji ilə silahlanma səviyyəsi nə qədər yuxarı olarsa, əmək məhsuldarlığı da bir o qədər yuxarı olar. Ancaq bu asılılığın birqiymətliliyi haqqında heç nə demək olmaz. Eyni ilə mal–qaranın yemlənmə səviyyəsinin artırılması və yemin keyfiyyətinin yaxşı-laşdırılması bilavasitə məhsuldarlığa təsir edir. Lakin, məlumdur ki, ayrı–ayrı heyvanların məhsuldarlıq artımı müxtəlif olacaqdır.

Əməyin enerji ilə silahlanma səviyyəsi və əmək məhsuldarlığı, mal–qaranın yemlənmə səviyyəsi və onların məhsuldarlığı arasındakı əlaqəni, çoxlu sayda müşahidə aparıb, amil əlaməti və nəticə əlamətinin orta qiymətlərini müqayisə etməklə vermək olar.

Bu cür asılılıqlar zamanı –amil əlamətinin hər bir qiymətinə nəticə əla-mətinin bir neçə qiymətinin uyğun gəlməsi onunla izah edilir ki, –ə amilindən başqa, biz tərəfdən obyektiv və subyektiv səbəblərə görə nəzərə alınmayan digər amillər də təsir edir. Bundan başqa, ola bilsin ki, götürülmüş amili –ə bilavasitə deyil, məhz digər amillərin vasitəsilə təsir edir. Ona görə də baxılan asılılıqlarda, amil əlamətinin hər qiymətinə nəticə əlamətini bir deyil, çoxlu sayda qiyməti uyğun gəlir.



Məsələn, aşağıdakı cədvəldə 40 müəssisədə əmək məhsuldarlığının səviyyəsi və məhsul vahidinin maya dəyəri haqqında məlumatlar cədvəl şəklində verilmişdir.

**Cədvəl 1**

**Məhsul vahidinin maya dəyəri və əmək məhsuldarlığı arasında əlaqə**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Məhsul vahidinin maya də­yə­ri, min man (y) | Əmək məhsuldarlığı | | | | | Yekunu |
| 10-12 | 12-14 | 14-16 | 16-18 | 18-20 |
| 6-8 | - | - | 1 | 2 | 1 | 4 |
| 8-10 | - | - | 4 | 3 | 1 | 8 |
| 10-12 | - | 3 | 4 | 7 | - | 14 |
| 12-14 | 2 | 4 | 5 | - | - | 11 |
| 14-16 | 1 | 2 | - | - | - | 3 |
| Yekunu | 4 | 8 | 16 | 9 | 3 | 40 |

Birinci sətirdə əlamətinin, birinci sütunda isə əlamətinin müşahidə edilən qiymətləri verilmişdir. Sətir və sütunların kəsişməsində isə əlamətlərin müşahidə edilən qiymətlər jütünün tezliyi göstərilmişdir. Məsələn, 7 tezliyi göstərir ki, əmək məhsuldarlığının səviyyəsi *(16,18),* məhsul vahidinin maya dəyəri isə (10,12) intervalında olan 7 müəssisə vardır. (–) xətti isə göstərir ki, uyğun cütlər müşahidə edilməmişdir. Axırıncı sütunda isə sətirlərin tezlikləri cəmi yazılmışdır. Məsələn, 3–cü sətrin tezlikləri cəmi *m\*3=3+7+4=14*–ə bərabərdir. Bu ədəd onu göstərir ki, məhsul vahidinin maya dəyəri *(10,12)* intervalında olan müəssisələr 14 dəfə müşahidə edilmişdir. Axırıncı sətirdə isə sütunların tezlikləri cəmi göstərilir. Məsələn, 16 ədədi göstərir ki, əmək məhsuldarlığının səviyyəsi *(14,16)* intervalın-da olan müəssisələrin sayı 16-dır.



Tutaq ki, təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası təsadüfü kəmiyyəti-nin aldığı qiymətlərdən asılıdır. və təsadüfü kəmiyyətləri arasındakı bu cür asılılığa statistik asılılıq deyilir. Bu halda – asılı, isə asılı olmayan təsadüfü kəmiyyət adlanır.Yuxarıda göstərilən asılılıqların hər biri statistik asılılıqdır.



Təsadüfi kəmiyyətlər arasındakı statistik asılılığın öyrənilməsi böyük əhəmiyyət kəsb edir. Bu asılı olmayan kəmiyyətin müəyyən qiymət alması şərtində, asılı kəmiyyətin qiyməti barədə proqnoz verməyə imkan verir.

Xüsusi halda şərti riyazi gözləməsi kəmiyyətindən funksional asılı olarsa və arasındakı asılılıq korrelyasiya asılılığı adlanır.



Hadisələr arasındakı asılılığı öyrənən zaman iki mühüm hala baxılır. Birinci halda müşahidəçi və ya sınaq aparan şəxs asılı olmayan dəyişənin müəyyən qiymətlərini verir və asılı dəyişənin uyğun qiymətlərini müşahidə edir. Beləliklə, kəmiyyəti təsadüfi deyil (qeyd edilmişdir) və onun hər bir qiymətinə σ2 dispersiyalı baş yığımı uyğun gəlir.



Bu zaman müşahidə edilən qiymətlərinə baş yığımdan təsadüfi seçmə kimi baxılır. Bu halda asılı dəyişənin asılı olmayan dəyişənindən asılılığı (əgər asılılıq xəttidirsə)  reqressiya tənliyi vasitəsi ilə verilir. Bu cür modelə reqressiya modeli deyilir.



İlkin məlumatlar başqa xarakterə də malik ola bilər. Belə ki, müşahidə edilən

, qiymətlərinə *(X, Y)* ikiölçülü baş yığımından seçmə kimi baxmaq olar.



Beləliklə, əvvəlki haldan fərqli olaraq artıq qeyd edilməyən və yaxud nəzarət edilməyən dəyişəndir. Bu cür modelə korrelyasiya modeli deyilir.



Bu halda iki reqressiya qurmaq olar. *EY E(Y/X)=α+βx* (*y*–in *x*–ə reqressiyası) düz xətt üzərində, *EX* isə *E(X/Y)=α1+β1y* düz xəttinin üzərində yerləşir. Bu iki model arasındakı fərq mühüm əhəmiyyətə malikdir. Bununla yanaşı təhlil üçün tətbiq edilən statistik aparat hər iki halda əsasən eynidir. Fərq isə alınan bəzi nəticələrin müxtəlifliyində olacaqdır.

Qeyd edək ki, ümumiyyətlə təcrübədə xüsusilə iqtisadi məlumatların təhlilində bu modellər arasında fərqi dəqiq müəyyən etmək olmur.

Qeyd etdiyimiz kimi, korrelyasiya təhlili sınağın nəticələrinin təsadüfi kəmiyyət və onların çoxölçülü normal paylanmaya malik baş yığımdan götürüldüyünü qəbul edir.

Korrelyasiya asılılığının analitik formasının və bu asılılığın sıxlıq dərəcəsini təyin etmək korrelyasiya təhlilinin əsas məsələsidir.

**2.Şərti ortalar.Korrelyasiya cədvəli.**

Riyazi gözləmənin qiymətləndirilməsi olaraq şərti ortalar qəbul edilir. Şərti orta –in qiymətlərində müşahidə edilən qiymətlərinin hesabi ortası kimi təyin edilir. Məsələn, olduqda, kəmiyyəti qiymətlərini alıır-sa, şərti orta



kimi təyin edilir.

(*X,Y)* baş yığımindan həcmi *n* olan *(Xi, Yi), i=1,2,...,n* seçməsini götürək.

İki ölçülü variasiya sırasının aşağıdakı cədvəl şəklində yazılışına korrelyasiya cədvəli deyilir.

**Cədvəl 2.**

**Korrelyasiya cədvəli**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X  Y | x1……x2………xk………xn | my |
| y1 |  | m\*1 |
| y2 |  | m\*2 |
| . |  | . |
| . |  | . |
| ye | ……………mke…………… | m\*e |
| . |  | . |
| yn |  |  |
| mx | mk\* | n |

Korrelyasiya cədvəlinin *X* sətrində *X, Y* sətrində isə *Y* elementləri artan sıra ilə düzülmüşdür. *k*–cı sütunun və *l*–ci sətrin kəsişməsində isə (*xk, ye*) cütlərinin sayı, yəni *mke* tezliyi yazılmışdır.

*my* sütununda birölçülü variasiya sırasının, *mx* sətrində isə *X* variasiya sırasının tezlikləri yazılmışdır.



*,* 



**3. Korrelyasiya və determinasiya əmsalları**

Korrelyasiya analizində hadisələr və onların əlamətləri arasındakı əlaqənin sıxlığının ölçülməsi mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Əlaqənin sıxlığını ölçmək, yəni *X* amil əlamətinin *Y* nəticə əlamətinin varia-siyasına təsir dərəcəsini ölçmək mühüm nəzəri və təcrübi əhəmiyyətə malikdir. Əlaqənin sıxlığını ölçməklə, hər bir amil əlamətinin nəticə əlamətinə təsir dərəcə-sini müəyyənləşdirmək olur.

Düzxətli korrelyasiyada əlamətlər arasındakı əlaqənin sıxlığını ölçmək üçün adətən xətti korrelyasiya əmsalından istifadə edilir. O, aşağıdakı düsturun köməyi ilə hesablanır:



Burada ‾*x* və ‾*y* uyğun olaraq *X* və *Y* əlamətlərinin orta qiymətləri, *σx* və *σy* orta kvadratik meylləridir.

Tutaq ki, *X* və əlamətləri üzərindəki müşahidələrin nəticələri aşağıdakı cəd-vəldə əks olunmuşdur.



**Cədvəl 3.**

**Müşahidələrin nəticələri**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X  Y | 3 | 7 | 10 | ny |
| 5 | 2 | 1 | 4 | 7 |
| 8 | 5 | 9 | 1 | 15 |
| nx | 7 | 10 | 5 | n=22 |

Cədvəldən göründüyü kimi, xətti kolrrelyasiya əlaqəsinin qiymətləndirilməsi üçün əlamətinin müşahidə edilən qiymətləri qruplara ayrılmışdır. Hər bir qrup *X* əlamətinin müəyyən qiymətlərinə uyğun gələn *y*–i özündə saxlayır. Məsələn, birinci qrupa *x1=3* qiymətinə uyğun, *y*–in 7 qiyməti (2 dəfə *y1*=5, 5 dəfə *y2*=8) müşahidə edilmişdir.

Üçüncü qrupa isə *y*–in 5 (4 dəfə *y1*=5, 1 dəfə *y2*=8 müşahidə edilmişdir) qiyməti daxildir. *y*–in bütün qiymətləri qruplara ayrıldığına görə dispersiyaların toplanma-sı qanuna görə



Tutaq ki, *X* –dən funksional asılıdır. Bu halda *X* –in hər bir qiymətinə –in ancaq və ancaq bir qiyməti uyğun gəlir. Deməli, hər bir qrupda –lər bir–birinə bərabərdir. Ona görə də qrupdaxili dispersiyalar sıfıra bərabərdir. Beləliklə,





və ya



İndi isə fərz edək ki, və *X* arasında korrelyasiya asılılığı vardır.Bu halda *X*–in hər bir qiymətinə *Y*–in qrupları əmələ gətirən müxtəlif qiymətləri uyğun gəlir.



σ2qr.dax>0 olduğuna görə σ2qr.ar<σ2üm olar. Buradan isə  olduğunu alarıq.

Aparılan mühakimələrdən aydın olur ki, əlamətlər arasındakı əlaqə funksional asılılığa nə qədər yaxın olarsa σ2qr.dax. bir o qədər kiçik olar və nəticədə  nis-bəti isə vahidə daha yaxın olur. Əlamətlər arasındakı korrelyasiya asılılı-ğının ölçüsü olaraq



nisbətini götürmək olar.

Əlaqənin istənilən formasında korrelyasiya indeksindən istifadə edilir. Korrelyasiya indeksi



düsturu ilə hesablanır. Dispersiyaların toplanması qanununa görə *η*–nı



düsturunun köməyi ilə hesablamaq olar. Burada,

 – ümumi dispersiya;

– qalıq dispersiya;

 – amil dispersiyasıdır.

Ümumi dispersiya hadisənin variasiyasına bütün amillərin, amil dispersiyası ancaq öyrənilən amil əlamətinin, qalıq dispersiya isə digər amillərin təsirini xarakterizə edir.

Korrelyasiya indeksi *0* ilə *1* arasında tərəddüd edir. Onun vahidə bərabər olması əlamətlər arasında funksional asılılığın, sıfıra bərabər olması isə əlamətlər arasında əlaqə olmadığını, yəni əlamətlərin asılı olmadıqlarını göstərir.

Bütün əlaqə formalarında korrelyasiya indeksini hesablamaq olar. Təcrübədə hesablamanı sadələşdirmək üçün korrelyasiya indeksini



düsturu ilə hesablayırlar.

1. Korrelyasiya nisbəti *0≤η≤1* bərabərsizliyini ödəyir.

Doğrudan da η≥0 bilavasitə korrelyasiya indeksinin tərifindən alınır. Disper-siyaların toplanması qanunna görə



Axırıncı bərabərliyin hər iki tərəfini σ2üm–yə bölsək



olar.

olduğuna görə *η2≤1* olar.

Beləliklə,

0≤η≤1.

2. *η=0* olduqda y kəmiyyəti *x*–ilə korrelyasiya asılılığına malik deyil. Doğrudan da *η=0* olduqda  olar. Bu isə o deməkdir ki, *x*–in bütün qiymətlərində . Başqa sözlə ‾yx şərti ortaları *X* –in funksiyası deyil. Bu isə *Y* kəmiyyəti ilə *X* arasında korrelyasiya asılılığı olmadığını göstərir.

3. *η=1* olduqda *Y* kəmiyyəti *X*–dən funksional asılıdır.

*η=1* şərtindən  olduğu alınır. Axırıncı münasibətdən qrupdaxili disper-siyaların sıfıra bərabər olduğu alınır. Bu isə o deməkdir ki, *X*–in hər bir qiymətinə –in ancaq və ancaq bir qiyməti uyğun gəlir. Yəni η=1 olduqda *X*–dən funksio-nal asılıdır.



4.  bərabərsizliyi doğrudur. Burada r xətti korrelyasiya əmsalıdır.

5.  olduqda və *X* arasında xətti korrelyasiya asılılığı vardır.



Aydındır ki,



Onda korrelyasiya əmsalı üçün



düsturunu alırıq.

Qeyd edək ki, korrelyasiya əmsalının bu cür hesablanması əvvəlki düsturla müqayisədə daha əlverişlidir.

Təcrübədə bəzi hallarda korrelyasiya əmsalını



düsturu ilə hesablayırlar.

Statistik məlumatların verilməsindən asılı olaraq, məsələn, əlamətlərin qiymət-ləri paylanma sırası şəklində verildikdə



düsturu tətbiq edilir.

**Cədvəl 4.**

**Xətti kolrrelyasiya əlaqəsinin qiymətləndirilməsi**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Xətti korrelya­si­ya əmsalı | Əlaqənin xarakteri | Əlaqənin təsviri |
| r=0 | yoxdur | - |
| 0<r<1 | düz | x-in artması ilə y-də artır |
| -1<r<0 | tərs | x-in artması (azal­ma­sı) ilə y azalır (artır) |
| r=±1 | funksional | Amil əlamətinin hər bir qiy­mə­tinə nəticə əlamətinin bir qiy­mə­­ti uyğundur |

Əlaqənin sıxlığı isə aşağıdakı təqribi sxem üzrə qiymətləndirilir.

**Cədvəl 5.**

**Əlaqənin sıxlığının qiymətləndirilməsi**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Əlaqənin sıxlığı | Korrelyasiya əmsalının qiyməti | |
|  | Düz əlaqə | Tərs əlaqə |
| Zəif | 0,1–0,3 | (–0,1) – (–0,3) |
| Orta | 0,4–0,7 | (–0,4) – (–0,7) |
| Güclü | 0,8–1,0 | (–0,8) – (–1,0) |

Determinasiya əmsalı əlamətlər arasındakı əlaqənin reqressiya tənliyi isə onun keyfiyyətini müəyyən edir. Aydındır ki, əlamətin faktiki qiymətləri (müşahidə edilən) reqressiya xətti ətrafında nə qədər sıx səpələnərsə, reqressiya əlamətlər arasındakı əlaqəni bir o qədər yaxşı əks etdirər.

Korrelyasiya indeksinin kvadratına determinasiya əmsalı deyilir.



σ2y-‾yx –cəmi sistematik variasiyanın reqressiya tənliyinə uyğun dəyişməsini xarakterizə edir. Bu cür variasiya reqressiya tənliyi ilə izah edildiyinə görə ona çox vaxt variasiyanın izah edilə bilən hissəsi də deyirlər. Deməli, determinasiya əmsalı variasiyanın izah edilə bilən hissəsinin ümumi variasiyada xüsusi çəkisini göstərir.

Determinasiya əmsalının ifadəsindən görünür ki, σ2y-yx –cəmi σ2y –cəminə nə qədər yaxın olsa, o, bir o qədər böyük olar və və arasındakı asılılığın reqres-siya tənliyi vasitəsi ilə verilməsi keyfiyyəti bir o qədər yüksək olar.



 olduqda *η=1* olar. Bu halda bütün nöqtələr reqressiya düz xətti üzərində yerləşir. olduqda *η=0* olar. Bu o halda ola bilər ki,  olsun və bu zaman –in dəyişməsi –in dəyişməsi ilə əlaqədar deyildir.



Determinasiya əmsalını



düsturu ilə hesabladıqda əvvəlcə reqressiya tənliyinə əsasən gözlənilən ‾*yx* qiymət-ləri hesablanmalı sonra isə



cəmi hesablanmalıdır. Müşahidələrin sayı çox olduqda bu cəmin hesablanması texniki cəhətdən çətinlik yaradır.

Ona görə də bir çox hallarda reqressiya əmsalları məlum olduqda σ2y-yx cəmini



düsturunun köməyi ilə hesablamaq məqsədəuyğundur.

Ümumi cəmin



şəklində yazılışından istifadə edərək



olduğunu alırıq. Beləliklə, determinasiya əmsalı üçün



ifadəsini alırıq.





olduğunu nəzərə alsaq düsturun doğruluğunu alarıq.

**4. Cüt xətti korrelyasiya**

Tutaq ki, *(X,Y)* ikiölçülü normal paylanmaya malik baş yığımdır. Məlumdur ki, bu paylanmanın sıxlıq funksiyası



şəklindədir.

Burada,



*f(x,y)*–sıxlıq funksiyası aşağıdakı beş parametr vasitəsi ilə təyin edilir.

,



və



Bu parametrlər məlum olduqda aşağıdakı iki reqressiyanı qurmaq olar.



*y*–in *x*–ə reqressiyası,



*x*–in *y*–ə reqressiyası,

Burada,

*, *

Cüt korrelyasiya analizinin əsas məsələsi hər şeydən əvvəl baş yığımı təyin edən parametrlərin qiymətləndirilməsidir.

Naməlum beş parametrin nöqtəvi qiymətləndirmələri aşağıdakı kimi hesablanır:

 –in qiymətləndirilməsi,

 –in qiymətləndirilməsi,

 –in qiymətləndirilməsi,

 –in qiymətləndirilməsi,

 –-in qiymətləndirilməsi.



Buradan:

 – σ2x–in qiymətləndirilməsi;

–σ2y – in qiymətləndirilməsi,

–– nun qiymətləndirilməsi.

*βyx* və *βxy* reqressiya əmsallarının qiymətləndirmələri uyğun olaraq

, 

düsturları vasitəsilə tapılır.

Beləliklə, reqressiya tənliklərinin qiymətləndirmələri

*y*–in *x*–ə reqressiyası



*x*–in *y*–ə reqressiya

olar.



Qeyd etmək lazımdır ki, bu qiymətləndirmələrin hər biri əsaslıdır, bununla ya-naşı  və  eyni zamanda yerini dəyişməyən və effektiv qiymətləndirmələrdir.

Korrelyasiya cədvəli ilə ilkin tanışlıq korrelyasiya əlaqəsinin olub–olmaması və onun istiqaməti haqqında mülahizələr söyləməyə imkan verir. Əgər korrelyasiya cədvəlində tezliklər yuxarı sol küncdən aşağı sağ küncə çəkilmiş diaqonal üzrə yerləşərsə, əlamətlər arasında düzxətli korrelyasiyanın olduğunu, tezliklər sağdan sola çəkilmiş diaqonal üzərində yerləşərsə tərs əlaqənin olduğunu fərz etmək olar.

**5.Seçmə xarateristikaların hesablanması.**

İndi isə seçmə xarakteristikaların hesablanması qaydasını nəzərdən keçirək.

Seçmənin həcmi kiçik olduqda empirik korrelyasiya xarakteristikalarını hesab-lamaq üçün, əlamətin müşahidə edilən qiymətlərini onların qeyd olunma ardıcıllı-ğına görə düzürlər (variasiya sırasını qurmayaraq). Sonra isə aşağıda göstərilən sxem üzrə hərəkət edirlər.  **Cədvəl 6**

**Kiçik seçmə xarakteristikalarının hesablanması sxemi**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | x2 | y2 | xy |
| . | . | . | . | . |
| xi | yi | x2i | y2i | xi yi |
| ∑xi | ∑y | ∑ x2i | ∑ y2i | ∑xiyi |

Bundan sonra empirik korrelyasiya xarakteristikaları aşağıdakı düsturların köməyi ilə hesablanır.

, ,

, ,



Burada .

,



Seçmənin həcmi böyük olduqda korrelyasiya cədvəlini tərtib etmək üçün qrup-laşdırılmış seçmədən istifadə edilir.

**Cədvəl.7**

**Böyük seçmədə xarakteristikaların hesablanması sxemi**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x  y | .……..[ , bk ]………… | my |
| . | ………………………….. | . |
| . | ………………………….. | . |
| . | ………………………….. | . |
| (ce,de) | …………mke……..…….. | m\*e |
| . | ………………………….. | . |
| . | ………………………….. | . |
| . | ………………………….. | . |
| mx | …..………mk\*…………… | n |

Burada *mke*, *{<x<bk; ce<y<de}* düzbucaqlısına düşən elementlərin sayıdır, yə-ni düzbucaqlının tezliyidir.

*(, bk]* intervallarının eyni *h1*, *(ce, de]* intervallarının isə eyni *h2* uzunluqlarına bərabər olduğu fərz edilir. Sonrakı hesablamalarda intervalların orta nöqtələri və uyğun tezliklər istifadə edilir. *(, bk]* intervalının orta nöqtəsini xk, *(ce, de]* inter-valının orta nöqtəsini isə  ilə işarə edək. İntervallı variasiya sıralarının empirik korrelyasiya xarakteristikalarını hesablamaq üçün

, 

şərti variantlarına keçmək məqsədə uyğundur.

Burada və uyğun olaraq  və  variantlarının “yalan sıfırlarıdır”. Yalan sıfır olaraq adətən təqribən variasiya sırasının ortasında yerləşən variantı qəbul etmək əlverişlidir.

Şərti variantlar təyin edildikdən sonra empirik korrelyasiya xarakteristikalarını aşağıdakı düsturların köməyi ilə təyin edirlər.

, 

Burada ‾u və ‾*v* uyğun olaraq şərti variantların orta qiymətləridir, yəni

, 

, 



Məlumdur ki, qruplaşdırma zamanı xətaya yol verilir və ola bilsin ki, bu zaman hesablanmış xarakteristikalar seçmə xarakteristikalardan kəskin sürətdə fərqlənsin. Qruplaşdırılmış seçmənin iki tərtibli mərkəzi momentlərini Şeppard düzəlişi vasitəsi ilə xeyli yaxşılaşdırmaq olar.

, 

Bu düzəliş intervalın uzunluğu əlamətin variasiya genişliyini aşmadıqda qruplaşdırma nəticəsində əmələ gələn xətanı əksər hallarda hamarlaşdırır.

**6. Əlaqə parametrlərinin əhəmiyyətliliyinin yoxlanılması**

**və etibarlılıq intervalının qurulması**

Seçmənin həcmi böyük olduqda xətti korrelyasiya əmsalının  para-metrli normal paylanmaya malik olduğunu qəbul etmək olar. Deməli, korrelyasiya əmsalının orta kvadratik xətası  olar.  olduqda korrelyasiya əmsalı əhəmiyyətlidir.  olduqda isə onun *1–α* ehtimalı ilə əhəmiyyətsiz ol-duğunu demək olar. Bu isə *1–α* ehtimalı ilə baş yığımda əlamətlər arasında korrel-yasiya əlaqəsinin olmadığını söyləməyə imkan verir.

Korrelyasiya əmsalı üçün etibarlılıq intervalı isə



şəklində olar.

Korrelyasiya əmsalını əlaqə ölçüsü kimi qəbul etdikdə nəzərə almaq lazımdır ki, o təsadüfi seçməyə əsasən hesablanır, ona görə də təsadüfi amillərin təsirinə məruzdur. Seçmənin həcmi böyük olmadıqda korrelyasiya əmsalının seçmə xəta-sını hesablamaq kifayət qədər mürəkkəbdir. Ona görə də təcrübədə çox vaxt onun xətasını hesablamaq əvəzinə əhəmiyyətliliyi haqqında fərziyyəni yoxlayırlar.

Verilmiş *α* əhəmiyyətlilik səviyyəsində əlaqə parametrlərinin sıfıra bərabər olması haqqında *H0: ρ=0* əsas fərziyyəni rədd edildikdə deyirlər ki, bu parametr sıfırdan əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənir. Bu fərziyyə qəbul edildikdə isə əlaqə para-metri əhəmiyyətsiz adlanır.

Qeyd edək ki, cüt korrelyasiyada ancaq korrelyasiya əmsalının əhəmiy-yətliliyini yoxlamaq kifayətdir. Korrelyasiya əmsalı əhəmiyyətsiz olduqda baş yığımdakı *X* və *Y* əlamətlərinin asılı olmadıqları qəbul edilir.

*H0:* *ρ=0* əsas hipotezini yoxlamaq üçün



kriteriyasından istifadə edilir. t- kriteriyası sərbəstlik dərəcəsi n-2 olan Styudent paylanmasına malikdir. Fərziyyəni yoxlamaq üçün kriteriyanın tm müşahidə edilən qiyməti və tcəd jədvəl qiyməti ilə müqayisə edilir. Belə ki, əgər |tm|>tcəd olarsa verilmiş α dəqiqlik səviyyəsi ilə əsas fərxiyyə rədd edilir, |tm|≤tcəd olduqda əsas fərziyyə qəbul edilir.

**Mövzu 15. Reqressiya analizi.**

**P L A N**

**1.Əsas anlayışlar**

**2.** **Cüt xətti reqressiya analizi**

**2.1.Reqressiya əmsallarının təyini**

**2.2.Reqressiya analizinin ilkin şərtləri.Qauss-Markov şərtləri.**

**3. Qeyri xətti reqressiya.**

**4.Reqressiya əmsalları üçün etibarlılıq intervallarının qurulması**

**4.1. reqressiya əmsalı üçün etibarlılıq intervalının qurulması.**



**4.2. reqressiya əmsalı üçün etibarlılıq intervalının qurulması.**



**6.Şərti riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervalının qurulması.**

**7.Reqressiya tənliyinin əhəmiyyətliliyinin yoxlanılması**

1.S.Ö.Ömərov, N.Ə.cavadov.Riyazi və tətbiqi statistika.Bakı, Azərnəşr, 2007.

2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çaşıoölu, 2006.

**Mövzu 15.Reqressiya analizi.**

**1. Əsas anlayışlar**

Riyazi statistikanın metodlarının tətbiqi zamanı aşağıdakı məsələyə tez–tez rast gəlinir.

dəyişənlərindən və *β1, β2, …, βk* naməlum parametrlərindən asılı təsa-düfi kəmiyyəti öyrənilir. vektoruna –ölçülü baş yığım kimi, *i*–ci sınağın nəticələrinə



,



isə bu yığımdan həcmləri n olan seçmələr kimi baxaq.

*β1, β2, …, βk* naməlum parametrlərini təyin etmək tələb edilir. Bu məsələyə cüt xətti reqressiya analizi məsələsi deyilir.

Qeyd edildiyi kimi reqressiya analizi təsadüfü kəmiyyətinin dəyişən-lərindən asılılığını öyrənən statistik təhlil metodudur. Burada dəyişənləri tə-sadüfü kəmiyyətlər hesab edilmir. Reqressiya analizinin tətbiqi zamanı təsadüfü kəmiy­yətinin σ2 dispersiyalı normal paylanmaya malik olduğu fərz edilir.



Reqressiya tənliyinin və *β*i əmsallarının əhəmiyyətliliyinin yoxlanması və *βi*–lər üçün etibarlılıq intervalının qurulması üçün *Y* təsadüfü kəmiyyətlərinin normal paylanmaya malik olması zəruridir. Bu şərt *βi-*lər üçün nöqtəvi qiymətləndirmələr qurul­ması üçün zəruri deyil.

Reqressiya tanalizində xətti model dedikdə naməlum *β1, β2, …, β*parametr-lərindən xətti asılı olan model başa düşülür. Naməlum parametrlərdən və dəyişənlərindən xətti asılı olan model isə xüsusi xətti model adlanır.



Ümumi şəkildə reqressiya təhlilinin xətti modeli aşağıdakı şəkildədir:



Burada, – dəyişənlərinin müəyyən funksiyası, *ε* isə təsadüfü kəmiy-yətdir:







Reqressiya tənliyinin növü öyrənilən hadisənin təhlilinə əsasən müəyyən edilir. Təsrübədə adətən reqressiya tənliyinin aşağıdakı növlərinə rast gəlinir.

1) xətti – ;



2) polinomial – ;



3) hiperbolik – ;



4) *n*–ölçülü xətti – ;



5) üstlü –;



Üstlü reqressiya tənliklərini loqarifləmə əməliyyatının köməyi ilə parametr-lərə görə xətti tənliyə gətirmək olar.

Doğrudan da,



işarə etsək, əvəzləmədən sonra



olduğunu alırıq. Eyni qayda ilə



əvəzləmələrinin köməyi ilə hiperbolik və polinomial reqressiya tənlikləri xətti tənliklərə gətirilə bilər.

**2. Cüt xətti reqressiya.**

**2.1. Reqressiya əmsallarının təyini**

Tutaq ki, öyrənilən hadisəmin təhlili əsasında demək olar ki, ,–in xətti funksiyasıdır, yəni



burada və seçmə müşahidəsinə əsasən qiymətləndirilməsi tələb edilən namə-lum parametrlərdir. Tutaq ki, və parametrlərini tapmaq üçün baş yığı-mından həcmi *n* olan seçmə götürülmüşdür. *i*–ci () müşahidənin nəticə-sini *(xi,yi)* ilə işarə edək. Bu halda reqressiya analizi modeli



şəklində olar. Burada *εi*–lər asılı olmayan normal paylanmış təsadüfü kəmiyyətlər-dir və



Ən kiçik kvadratlar üsuluna görə naməlum *β0* və *β1* əmsalları



şərtindən tapılır.

funksiyasının minimumunu tapmaq üçün və –ə görə xüsusi törəmələri hesablayaq:



Ekstremimun zəruri şərtinə əsasən və naməlum parametrlərini tapmaq üçün



tənliklər sistemini alırıq. Burada *b0* və *b1* uyğun olaraq naməlumvə para-metrlərinin qiymətləndirmələridir. Sadə çevirmələrdən sonra



tənliklər sistemini alırıq. Bu tənliklər sisteminə normal tənliklər sistemi deyilir.

Tənliklər sistemini və görə həll edərək



(5)



olduğunu alarıq. Burada,



Qeyd edək ki, olduqda *b0* və *b1* üçün tapılmış ifadələr xeyli sadələşir. Belə ki, bu şərt ödənildikdə



olur. Bu şərt ödənilmədikdə isə əvəzləməsi aparmaqla şərtinə gəlmək olar.



Reqressiya xətti nöqtəsindən keçir. reqressiyanın bucaq əmsalıdır və –vahid qədər artdıqda –in orta hesabla neçə vahid artdığını göstərir.



Reqressiya tənliyi qurulduqdan sonra –in müşahidə edilən qiymətlərinişəklində göstərmək olar. xətaları kimi qalıqları da təsadüfi kəmiy-yətlərdir, ancaq onlar –lərdən fərqli olaraq müşahidə ediləndirlər.



olduğunu göstərək.Doğrudan da,



olduğundan



və qəbul edək.



Onda



Beləliklə, reqressiya tənliyinin



şəklində olduğunu alarıq.

İndi isə göstərək ki, normal paylanmış təsadüfü kəmiyyət olduqda ən kiçik kvadratlar və ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsulları ilə alınmış qiymətləndirmələr üst – üstə düşür.



Tutaq ki, baş yığımdan həcmi n olan *(xi,yi), ()* asılı olmayan seç-məsi götürülmüşdür.



Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, reqressiya analizində –lərə asılı olmayan parametrli normal təsadüfü kəmiyyətlər kimi baxılır.Onda onların sıxlıq funksi-yaları



olar.

Bu halda seçmənin həqiqətəoxşarlıq funksiyası



şəklində olar.

Ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsuluna görə ,və *σ2* parametrlərinin qiymət-ləndirmələri olaraq *L* funksiyasına maksimum qiymət verən *b0, b1* və qiymətlərini götürmək lazımdır. Verilmiş *x1, x2, …, xn və σ2* üçün



funksiyası özünün ən kiçik qiymətini aldıqda həqiqətəoxşarlıq funksiyası öz maksimumunu alır. Bu isə ən kiçik kvadratlar üsuluna görə *b0 və b1* tapılması şərtləri ilə üst–üstə düşür.



**2.2.reqressiya analizinin ilkin şərtləri. Qauss**–**Markov şərtləri**

reqressiya modelində təsadüfi kəmiyyəti iki toplananın cəmindən ibarərdir:



1) təsadüfü olmayan ;



2) təsadüfü .



Reqressiya əmsalları təsadüfü kəmiyyətinin xətti funksuyasıdır və nəzəri olaraq onları da iki toplananın cəmi şəklində göstərmək olar.



munasibətlərinə əsasənreqressiya əmsalları üçün



ifadələrini alarıq. Beləliklə, reqressiya əmsallarını iki toplananın cəmi şəklində göstərmək olar.Birinci toplanan reqressiya əmsallarının əsil qiymətinə bərabər olan təsadüfü olmayan kəmiyyətdir, ikincisi isə –dan asılı təsadüfü kəmiyyətdir.



Ən kiçik kvadratlar üsuluna əsaslanan reqressiya analizinin mümkün nəticə-lərdən ən yaxşısını verməsi üçün müəyyən şərtlər–Qauss–markov şərtləri ödənil-məlidir. Bu şərtlər aşağıdakılardan ibarətdir:

1.İstənilən müşahidədə təsadüfü həddin riyazi gözləməsi sıfra bərabər olmalıdır.

Yəni,



2.Bütün müşahidələr üçün təsadüfü həddin dispersiyası sabit olmalıdır.Yəni,



3.Təsadüfü hədlər statistik asılı (korrelirə edilmiş) olmamalıdırlar.Yəni,



4. dəyişəni təsadüfü kəmiyyət deyildir.



Qauss–Markov şərtləri ödənildikdə model klassik normal reqressiya modeli adlanır.

Qauss–Markov şərtləri ilə yanaşı adətən, təsadüfü həddin parametrli normal paylanmaya malik olduğu fərz edilir, .



Qeyd edək ki, təsadüfü hədd normal paylanmaya malik olduqda onların koorrelirə edilməmiş şərti asılı olmayanlıq şərti ilə eynigüclüdür.

**İndi isə Qauss–Markov şərtlərinin şərhini verək:** Beləliklə, birinci şərt para-metrlərin qiymətləndirmələrinin yerinidəyişməyən yəni,



olduğunu göstərir. Qiymətləndirmənin yerini dəyişməyənliyi parametrlərin tapıl-mış qiymətləndirmələrinin onun əsil qiyməti ətrafında yerləşdiyi deməkdir. Bu şərt sabit hədd modelə daxil edildikdə həmişə ödənilir.

İkinci şərt hər bir müşühidədə təsadüfi həddin dispersiyasının sabit qaldığını göstərir.Burada dispersiya dedikdə təsadüfü həddin seçmə aparılanadək mümkün hərəkəti başa düşülür. Dispersiyanın məlum olmadığı qəbul edilir və onun qiy-mətləndirilməsi reqressiya analizinin əsas məsələlərindən biridir.

Təsadüfi həddin dispersiyasının bütün müşahidələr üçün eyni olması şərti homoskedastlik (bircinslilik), dispersiyanın müşahidədən asılılğı isə heteroskeda-stlik adlanır.

Beləliklə,

homoskedastlik.



–heteroskedastlik.



Homoskedastlik şərti ödənilmədikdə reqressiya əmsallarının qiymətləndirməsi yerinidəyişməyən olsa da effektiv olmayacaqdır.

Homoskedastlikliyin mövcudluğunu yoxlamaq və aradan qaldırılması üçün xüsusi kriterilər vardır.

Üçüncü şərt müxtəlif müşahidələr üçün təsadüfi hədlərin korrelirə edilmədik-lərini göstərir. Bu şərt ödənilmədikdə deyirlər ki, qalıqların avtokorrelyasiyası mövcuddur. Təsadüfü hədlərin asılı olmayanlıq şərti ödənilmədikdə reqressiya əm-sallarının ən kiçik kvadratlar üsuluna görə alınmış qiymətləndirmələri yerinidə-yişməyən olsalarda effektiv deyillər.

Avtokorrelyasiyanın mövcudluğunu yoxlamaq və aradan qaldırılması üçün də xüsusi kriterilər işlənilib hazırlanmışdır.

Dördüncü şərt mühüm əhəmiyyətə malikdir.Bu şərt ödənilmədikdə reqressiya əmsallarının qiymətləndirmələri yerinidəyişən və əsaslı olmayan qiymətləndir-mələrdir.

Reqressiya analizində adətən dördüncü şərti daha zəif şərtlə - -in və təsadüfü həddin paylanmalarının asılı olnazlığı şərti ilə əvəz edirlər.Bu zaman reqressiya əmsallarının qiymətləndirmələrinin xassələri dəyişmir.



Təsadüfü həddin normal paylanmaya malik olması şərti reqressiya əmsallarının əhəmiyyətliliyi haqqında hipotezlərin yoxlanılması və onlar üçün etibarlılıq intervallarının qurullması üçün vacibdir.



**Teorem (Qauss-Markov).** 1–4 Qauss–Markov şərtləri ödənildikdə reqressiya əmsallarının ən kiçik kvadratlar üsulu ilə alınmış qiymətləndirmələri ən yaxşı xətti qiymətləndirmələrdir. Yəni, bu qiymətləndirmələr yerinidəyişməyən,əsaslı və effektiv qiymətləndirmələrdir.

**İsbatı.** Aydındır ki,



Qiymətləndirmələrin riyazi gözləməsini və dispersiyasını hesablayaq:



Bu isə teoremin doğruluğunu göstərir.

**3. Qqeyri- xətti reqressiya.**

Reqressiyanın qeyri–xəttiliyi dəyişənlərə və parametlərə görə təyin edilir. Dəyişənlərə görə qeyri–xəttilik dəyişənlərin əvəz edilməsi, parametrlərə görə isə loqarifmləmə əməliyyatı üsulu ilə aradan qaldırırır. Məsələn, qeyri xətti tənliyi əvəzləməsi aparmaqla tənliyinə, loqarifm-ləmə əməlinin köməyilə qüvvət funksiyası tənli-yinə, eksponensial funksiyası isə funksiyasına çevrilir və onların parametrləri ən kiçik kvadratlar üsulu ilə qiymətləndirilir.



Eyni zamanda tənliyinə additiv daxil olduğuna görə onu xətti şəklə gətirmək mümkün deyildir. Bu halda qeyri–xətti reqressiyanın qiymətlən-dirilməsinin xüsusi üsullarından istifadə edilir.



İqtisadiyyatda aşağıdakı fuhksiyalardan istifadə edilir:

1.Tələbin reqressiya təhlilində -.



2.Zaman sıralarının tədqiqində - burada nisbi artımdır.



İqtisadi təhlildə funksiyasının elastikliyi analyışından istifadə edilir. funksiyasının elastikliyi



kimi hesablanır və –in nisbi dəyişməsinə nəzərən –in nisbi dəyişməsini xarakterizə edir. O, –n 1% dəyişməsi nəticəsində –in neşə faiz dəyişdiyini gös-tərir.



xətti funksiyasının elastikliyi –dən asılıdır.



Yəni,



Ona görə də elastikliyin orta göstəricisi



hesablanılır.

**4.Reqressiya əmsalları üçün etibarlılıq intervallarının qurulması**

**4.1. reqressiya əmsalı üçün etibarlılıq intervalının qurulması.**



Tutaq ki, .Onda





olar.

Buradan

; 

və yaxud



olduğunu alırıq.

Deməli, *b0–β0* fərqi normal təsadüfü kəmiyyətlərin xətti funksiyasıdır, ona görə də o özüdə normal paylanmaya malikdir və onun parametrləri aşağıdakı kimidir ,



Beləliklə, .Buradan aydın olur ki,  təsadüfü kəmiyyəti standart normal paylanmaya malikdir.

Digər tərəfdən



statistikası sərbəstlik dərəcəsi olan χ2 (*xi*–kvadrat) paylanmasına malikdir.



Burada,



dispersiyasının ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsulu ilə tapılmış qiymətlən-dirməsidir.



Styudent paylanmasının tərifinə görə



statistikanın sərbəstlik dərəsəsi olan Styudent paylanmasına malik oldu-ğunu deyə bilərik. Styudent paylanmasının sıxlıq funksiyası cüt olduğundan,





bərabərsizliyinin baş verməsi ehtimalı



bərabərliyi ilə hesablanır. Burada Sn(t) Styudent sıxlığıdır.

Axırıncı bərabərlikdən



və ya



münasibətini alarıq. Bu münasibəti



bərabərliyindən təyin olunan *tα* ədədi vasitəsi ilə



kimi yazmaq olar.

Deməli,



intervalı *β0* parametrinin *1–α* ehtimalına uyğun olan etibarlılıq intervalıdır. Nəzərə alınmalıdır ki, *α* əhəmiyyətlilik səviyyəsi verildikdə *tα* ədədi Styudent paylan-masının qiymətləri cədvəlindən tapılır.

**5. reqressiya əmsalı üçün etibarlılıq intervalının qurulması.**





Axırıncı tənlikdən *β1*–i tapırıq:



*b1–β1* fərqi normal paylanmış təsadüfü kəmiyyətləri-nin xətti kombinasiyası olduğuna görə o özü də normal paylanmaya malik olar. *b1*–*β1*  fərqinin parametrlərini tapaq:



*Dεi=σ2* olduğuna və *εi*–lər asılı olmadıqlarına görə



olduğunu yaza bilərik.

Beləliklə,



olar. Onda



olduğunu deyə bilərik.

Beləliklə, sərbəstlik dərəsəsi *n–2* olan



statistikasını alarıq.

*β1* əmsalı üçün etibarlılıq intervalının qurulmasına uyğun olaraq *β1* əmsalı üçün 

etibarlılıq intervalını alırıq.

**6.Şərti riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervalının qurulması.**

Tutaq ki, reqressiya tənliyinin qiymətləndirməsi –dir.



normal paylanmaya malik iki *b0* və *b1* təsadüfü kəmiyyətlərin xətti funksiyası olduıuna görə normal təsadüfü kəmiyyət olar. Bu paylanmanın parametrlərini tapaq:



Beləliklə,



dispersiyasını tapmaq üçün əvvəlcə *b0*və *b1*təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmadıqlarını göstərək. *b0* və *b1*fərqləri normal paylanmaya malik olduqlarına görə onların kollerilə edilməyən olduqlarından asılı olmadıqları alınır.



Beləliklə,



olduğunu göstərmək kifayətdir.



–lərin asılı olmadıqlarına, –lər təsadüfi olmayan kəmiyyətlər və olduğuna görə



olduğunu nəzərə alsaq,



olduğunu yaza bilərik.

Deməli, *b0* və *b1*asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Onda dispersiyanın məlum xassəsinə görə



olar.

Digər tərəfdən



olduğunu nəzərə alsaq



Deməli,



Onda



olar.

Beləliklə,



təsadüfü kəmiyyətinin sərbəstlik dərəcəsi n–2 olan Styudent paylanmasına malik olduğunu alırıq.

Onda *x=x0* olduqda  üçün



etibarlılıq intervalını alırıq.

**7. Reqressiya tənliyinin əhəmiyyətliliyinin yoxlanılması**

Əsas hipotezi , alternativ hipotezi isə şəklində qəbul edək.



Burada, - kəmiyyətinin dispersiyasının qiymətləndirməsidir.



əsas fərziyyə rədd edilir.Bu isə o deməkdir ki, reqressiya tənliyi əhəmiyyətlidir. Əks halda onu rədd etməyə heç bir əsas yoxdur, yəni reqressiya tənliyi əhəmiyyətsizdir.



Əhəmiyyətli reqressiya tənliyi üçün reqressiya əmsalları və şərti riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervallarının qurulması mühüm əhəmiyyət kəsb edir.